Г. И. Синкевич

ИСТОРИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ XVII–XIX вв.

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Г. И. Синкевич

ИСТОРИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ XVII–XIX вв.

Санкт-Петербург
2016

УДК 510, 517
ББК 22.1г

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа РГПУ им. А. И. Герцена, почётный профессор РГПУ В. С. Виденский; д-р техн. наук, профессор ПГУПС М. М. Воронина.

История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв.: моногр. / Синкевич Г. И.; СПб. гос. архит.-строит. ун-т. – СПб., 2016. – 312 с.

ISBN 978-5-9227-0648-3

Посвящена истории эволюции основных понятий математического анализа с XVI по XIX век – числа и числовой прямой, непрерывности, связности. Исследовано развитие и становление основных теорем математического анализа, связанных с непрерывностью. Представлены концепции Шарля Мере, Эдварда Гейне, Карла Вейерштрасса, Рихарда Дедекинда и Улисса Дини вместе с фрагментами их работ, многие из которых впервые переведены на русский язык.

ISBN 978-5-9227-0648-3

Введение

История понятия непрерывности тесно связана с представлением о числе. В античности числами назывались натуральные числа, а также их отношения – пропорции, названные рациональными числами. Тогда же обнаружилось, что бывают неизмеримые величины – это $\sqrt{2},\sqrt[3]{2}$, и другие числа, из которых нельзя извлечь корень. Обнаружилось также, что отношение длины окружности к диаметру нельзя выразить рациональным числом. Это число обозначили по первой букве слов «периферия» – окружность, «периметр» греческой буквой π. Ноль появился в Индии, но означал пустой разряд, – и долго не считался числом. Отрицательные числа встречались у Диофанта, но физического или геометрического смысла они не имели. Потом им придали коммерческий смысл: отрицательное число означало долг. В XVI веке Михаэль Штифель сказал, что отрицательные числа – это числа, меньшие нуля. Его современник Джироламо Кардано тогда же обнаружил существование мнимых чисел, которые полноправно вошли в математику только в XIX веке в работах Гаусса и Коши. Лейбниц стал различать иррациональные числа как алгебраические и трансцендентные. Кантор доказал счётность рациональных чисел, счётность иррациональных алгебраических чисел, и несчётность трансцендентных чисел. Общее определение числа в 1872 году дали одновременно Дедекинд, Мере, Гейне и Кантор вместе с понятием непрерывности.

До XIX века непрерывность рассматривалась применительно к физическим объектам – пространству, времени, движению. Непрерывность математических объектов вошла в математику, начиная с Лейбница, хотя долго ещё имела физическую интерпретацию. Идею о том, что нужно доказывать математическое свойство непрерывности без обращения к физическому смыслу, высказал Бернард Больцано. Группа теорем о непрерывных функциях сформировалась в курсах анализа Коши, и была развита в курсах Мере, Вейерштрасса и Дини.

Наряду с понятием непрерывности функции, в XIX веке начинают рассматривать понятие непрерывности числовой прямой, связности, в XX веке понятие – компактности.

Эволюция связи понятий числа, непрерывности числовой прямой, геометрической прямой показана в работах математиков XIX века

Бернарда Больцано, Карла Вейерштрасса, Шарля Мере, Эдварда Гейне, Рихарда Дедекинда и Георга Кантора. Тот материал, который неизвестен русскоязычному читателю, освещён более подробно, приведены переводы первоисточников – фрагменты из книги Штифеля, лекций Вейерштрасса, Мере, Гейне, Дини.

Глава I. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ XVI И XVII ВЕКОВ. МИХАЭЛЬ ШТИФЕЛЬ (1486–1567) И ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ (1564–1642)

Михаэль Штифель

XVI век принёс много перемен в жизнь народов Северной Европы. Мартин Лютер в одной из своих проповедей в 1522 году так описывал эти изменения: «Сколько ни читай всемирных хроник, не найдёшь ни в одной из её частей, начиная от Рождества Христова, ничего подобного тому, что произошло на протяжении этих последних ста лет. Таких сооружений и посевов не было ещё в мире, так же, как и столь разнообразной (на любой вкус) пищи, изысканных яств и напитков. Своего предела достигла также изысканность и роскошь в одежде. Кто прежде знал о таком купечестве, которое, как нынешнее, объехало бы вокруг света и связало своими делами весь мир? Несравнимо с прежними временами поднялись и расцвели всевозможные искусства – живопись, резьба по дереву, чеканка по металлу, меди, шитьё» [1, с. 69].

Мощная волна Реформации возникла из гуманистических учений Возрождения. Новое мировоззрение, обращённое к внутреннему миру человека, признало действие мировых законов в малом и обыденном. Замечательным явлением математики стало рассуждение алгебраиста XVI века Михаэля Штифеля о бесконечном количестве рациональных и иррациональных чисел на единичном отрезке.

Михаэль Штифель родился в 1486 году в Эслинге (север Люксембурга).

В юности вступил в монашеский орден августинцев. В этом же ордене состоял и Мартин Лютер, родоначальник Реформации, который в 1517 году опубликовал свои знаменитые 95 тезисов против папства. Штифель стал приверженцем Лютера и в 1521 (1522?) году покинул монастырь и перебрался в Виттенберг. После Лютер устроил его на место капеллана в одном дворянском поместье, а потом сельского священника.

Рис. 1. Михаэль Штифель

Штифель стал проповедовать новое учение в разных районах Германии. Он заинтересовался изучением Библии с точки зрения нумерологии. Числа, встречавшиеся в книге Даниила и в Откровении Иоанна, Штифель подверг анализу. Эти числа он заменял словами, буквы которых должны были соответствовать треугольным числам. Анализ имени папы Климента VII побудил его предсказать на 19 октября 1533 года конец света. Но предсказание не сбылось, и гнев крестьян, продавших скот за бесценок, вынудил власти посадить Михаэля Штифеля в тюрьму на четыре недели [2, с. 25]. После этого Штифель начал заниматься изучением математики серьёзно. Он изучал Евклида (в обработках Кампано и Замберти), Пачоли, Кардано, Тарталью, Дюрера, Рудольфа, Ризе, Николая Кузанского.

В течение 10 лет Штифель напечатал четыре книги: 1544 год – «Общая арифметика» [3], 1545 год – «Немецкая арифметика», 1546 год – «Вычислительная книга по вельской и немецкой практике», 1553 год – обработка

«Алгебры» Рудольфа, дополнения к которой, как заметил А. П. Юшкевич [4, с. 299], превосходят оригинальный текст.

Умер Штифель в 1567 году в Иене.

Штифель, как отмечает Цейтен, глубоко чувствовал внутренние связи математики [2, с. 25].

Штифель впервые стал рассматривать отрицательные числа как числа, меньшие нуля, а положительные, как большие нуля [2, с. 103]. Дробные и иррациональные величины он начал называть числами. Он заметил соответствие между арифметической и геометрической прогрессиями. Например, Штифель приводит такую таблицу:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64

Здесь он указывает на то, что в обеих пропорциях каждый элемент является средним пропорциональным своих соседних [3, с. 39–40]. Пятьдесят лет спустя Джон Непер положил эту идею соответствия в основу принципа логарифмов. Штифель сравнивает пропорции по скорости их роста. Рассматривает он также проблемы акустики, математические закономерности гармонии [3, с. 60–79].

У Штифеля удивительное геометрическое осознание числа. О целых, рациональных и иррациональных числах Штифель пишет, как они распределены относительно друг друга, то есть об их расположении на числовой прямой. Столетием позже, в 1633 году, к этому же вопросу обратится Галилей [5, с. 141–148].

Теория действительного числа была создана в XIX веке в работах Ш. Мере, К. Вейерштрасса, Э. Гейне, Р. Дедекинда и Г. Кантора. Одной из проблем был геометрический образ числовой прямой. В 1886 году Вейерштрасс утверждал, что каждому числу соответствует точка, но не каждой точке соответствует число, а иррациональные числа были неопределяемыми [6, с. 63]; Дедекинд в 1872 году называл числа существующими лишь в мире наших мыслей [7, с. 17–18]; Мере называл иррациональные числа фиктивными [8]; Кантор в 1872 году постулировал, что каждому числу соответствует точка на прямой, ибо доказать это невозможно [9, с. 13].

В 1553 году Штифель высказал идею многомерного обобщения куба. На этот факт обратили внимание Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич. Штифель рассматривает геометрическую прогрессию $1, a, a^2, a^3, \ldots$

и ставит в соответствие первому элементу, то есть единице, точку; второму элементу – линию; третьему элементу – плоскую квадратную фигуру; четвёртому элементу, то есть a^3 – куб, для которого проведённая линия, то есть отрезок, является кубическим корнем. «Если с арифметической точки зрения можно идти дальше, то геометрически не разрешено переходить к бóльшим измерениям, так как это породило бы телесные линии и поверхности. Куб полагался бы за телесную точку, за которой полагали бы телесную линию, за ней – телесную поверхность, а за ней полагали бы куб, за которыми шли бы дальше, как сейчас указано, но не останавливаясь. Но следовало бы сделать здесь доброе снисхождение из-за красивого и чудесного применения алгебры» [4, с. 299].

Многомерное обобщение куба используется Штифелем в 1553 году для иллюстрации формулы бинома, которую он формулирует для любого натурального показателя. Штифель приводит таблицы биномиальных коэффициентов, где каждый элемент образуется как сумма элементов предыдущей строки, стоящих над ним и слева от него. «Так же, как квадратные биномы разлагаются на 4 части, а кубические – на 8 частей, квадрато-квадратные биномы разлагаются на 16 частей, а сверхтелесные на 32 части и подобно этому идёт по двукратной прогрессии» [4, с. 301].

Обратимся к книге Штифеля 1544 года «Общая арифметика» (или «Обобщённая арифметика») [3].

Обзор этой книги по главам дан Г. П. Матвиевской [10, с. 148–157]. Первая часть называется «О рациональных числах», вторая – «Об иррациональных числах», третья – «Об алгебре».

Рассмотрим подробно тот фрагмент, в котором Штифель устанавливает, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и иррациональных чисел[1].

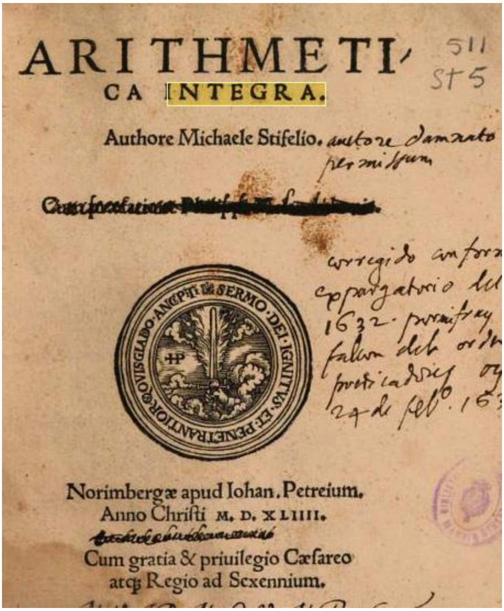
Во второй части (Arithmeticae. Liber secundus, de numeris irrationabilisbus) Штифель обращается к X книге Евклида, посвящённой иррациональным числам. Заметим, что к этой же книге Евклида обращался и Георг Кантор, когда работал над созданием теории множеств.

Первая глава второй части называется «Сущность иррациональных чисел» (De essentia numerorum irrationalium)[2] [3, с. 103].

---

[1] На этот фрагмент обратил внимание В. Венслав в своей книге [11, с. 82]. Приношу искреннюю благодарность В. Венславу за то, что он заинтересовал меня этим рассуждением Штифеля.

[2] Перевод Г. Синкевич.



ARITHMETICA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio. autore damnato
permissum

[redacted]

corregido conform
expurgatorio del
1632. por mi fray
falcon del ord
predicadores o
24 de febº. 16

Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Chriſti M. D. XLIIII.

[redacted]

Cum gratia & priuilegio Cæſareo
atq; Regio ad Sexennium.

Рис. 2. «Общая арифметика» Штифеля

«Иррациональные числа могут быть истинными или воображаемыми (ложными, неопределяемыми – ficti). Потому что в геометрических формах доказательства мы отказываемся от рациональных чисел в тех случаях, когда использование иррациональных чисел приводит к успеху, когда невозможно пользоваться в доказательствах рациональными числами; мы вынуждены пойти на то, чтобы признать иррациональные числа истинными, и как вы можете увидеть впоследствии, то, что мы считаем их реальными, подтвердит нашу уверенность, что это подлинные и точные постоянные. Но рассуждая иначе, мы придём к другому утверждению, так что будем вынуждены отрицать, что иррациональные числа – это тоже числа. А именно в том случае, когда истинные числа вычисляются как пропорции подлинного числа, все рациональные числа образуются как отношения, мы можем делать это вечно, так что никто не может быть в состоянии точно представить их все, что я и покажу далее в надлежащем месте.

Но оно [иррациональное число] не может быть названо также и числом истинным, которое обладало бы точностью, оно известно, но не представимо как отношение чисел. Поэтому, подобно тому как бесконечные числа[3] не являются числами, так и иррациональные числа не являются числами, они скрыты во мраке бесконечности (infinitatis nebula). Далее, если бы иррациональные числа были подлинными числами, они были бы либо целыми, либо дробными. Дробными (fractos) числами я называю такие, которые состоят из числителя и знаменателя, расположенные между двумя какими либо соседними целыми числами, например: $8\frac{7}{9}$ или $\frac{79}{9}$ расположено между 8 и 9. И между дробями $\frac{12}{3}$ и $\frac{12}{4}$ невозможно поставить целое число[4].

То, что иррациональные числа не являются целыми, легко показать. Любое иррациональное число расположено непосредственно между двумя определёнными числами. Например, $\sqrt{6}$ находится между числами 2 и 3, а $\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ находятся между числами 3 и 4. И так в других случаях. Но очевидно то, что между двумя соседними целыми числами нет целого числа, что чётко выражено. Таким образом, иррациональное число не может быть целым, так как оно расположено между соседними целыми. Но также иррациональное число не может быть и дробным. Ибо невозможно умножая дробные числа на себя, получить целое число. Но умножая иррациональное число на себя, получим целое число: как $\sqrt{6}$ в квадрате даст 6, и $\sqrt[3]{6}$ в кубе даст 6, и так далее. Следовательно, иррациональные числа не есть дробные. Предшествующее ясно. Ибо если знаменатель больше числителя, то квадрат знаменателя гораздо больше квадрата числителя. Также и куб знаменателя больше куба числителя, и это меньше целого [числа], и так далее. И так как мы не умножаем целые числа, нарушена возможность получить само [целое] число, так что перемножение дробей не может привести к целому числу. Кроме того, каждая дробь состоит в отношении к любому целому числу [пропорциональна], но никакое иррациональное число не может быть пропорционально никакому целому или дробному числу, о чём я уже упоминал раньше. Поэтому иррациональное число не может быть целым числом, а также не может быть и дробным числом. Аналогичным образом, бесконечное дробное

---

[3] Полагаю, что Штифелю имеет в виду числа, обозначаемые бесконечным числом символов.

[4] Можно заметить, что это рассуждение общностью не обладает. Но здесь есть предчувствие непрерывности числовой прямой.

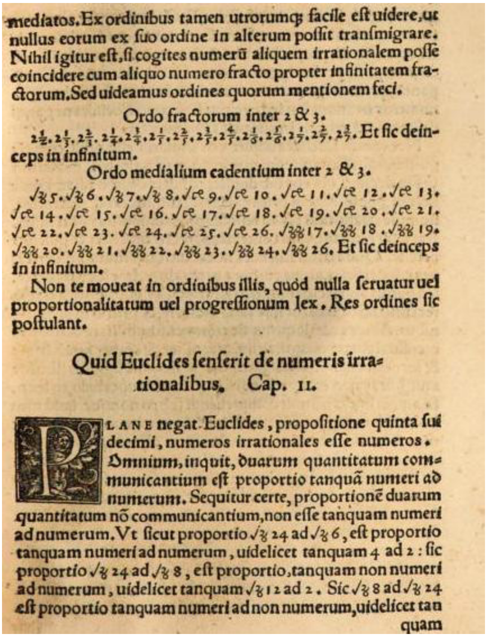
число располагается между двумя некими соседними числами, и подобно этому бесконечное иррациональное число располагается между двумя некими целыми соседними числами. Легко видеть, что ни одно из них не может быть перемещено в другую последовательность [ordine, отношение порядка] из двух этих пределов [ordinibus]. Так что ничто не позволяет допустить, что иррациональное число может совпасть с дробью или с бесконечной дробью.

Но давайте посмотрим последовательности, о которых я говорил. Последовательность дробей между 2 и 3.

$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{5}{6}, 2\frac{1}{7}, 2\frac{3}{7}$. И так далее до бесконечности.

Последовательность, расположенная между 2 и 3.

$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{13}, \sqrt[3]{14}, \sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{17}, \sqrt[3]{18}, \sqrt[3]{19}, \sqrt[3]{20}, \sqrt[3]{21}, \sqrt[3]{22}, \sqrt[3]{23}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[3]{26}, \sqrt[4]{17}, \sqrt[4]{18}, \sqrt[4]{19}, \sqrt[4]{20}, \sqrt[4]{21}, \sqrt[4]{22}, \sqrt[4]{23}, \sqrt[4]{24}, \sqrt[4]{26}$.



mediatos. Ex ordinibus tamen utrorumq; facile eſt uidere, ut nullus eorum ex ſuo ordine in alterum poſſit tranſmigrare. Nihil igitur eſt, ſi cogites numerũ aliquem irrationalem poſſe coincidere cum aliquo numero fracto propter infinitatem fractorum. Sed uideamus ordines quorum mentionem feci.

Ordo fractorum inter 2 & 3.

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. $2\frac{1}{7}$. $2\frac{2}{7}$. $2\frac{3}{7}$. Et ſic deinceps in infinitum.

Ordo medialium cadentium inter 2 & 3.

√ʒ 5. √ʒ 6. √ʒ 7. √ʒ 8. √ce 9. √ce 10. √ce 11. √ce 12. √ce 13. √ce 14. √ce 15. √ce 16. √ce 17. √ce 18. √ce 19. √ce 20. √ce 21. √ce 22. √ce 23. √ce 24. √ce 25. √ce 26. √ʒʒ 17. √ʒʒ 18. √ʒʒ 19. √ʒʒ 20. √ʒʒ 21. √ʒʒ 22. √ʒʒ 23. √ʒʒ 24. √ʒʒ 26. Et ſic deinceps in infinitum.

Non te moueat in ordinibus illis, quód nulla ſeruatur uel proportionalitatum uel progreſſionum lex. Res ordines ſic poſtulant.

Quid Euclides ſenſerit de numeris irrationalibus. Cap. 11.

PLANE negat Euclides, propoſitione quinta ſui decimi, numeros irrationales eſſe numeros. Omnium, inquit, duarum quantitatum communicantium eſt proportio tanquã numeri ad numerum. Sequitur certe, proportionẽ duarum quantitatum nõ communicantium, non eſſe tanquam numeri ad numerum. Vt ſicut proportio √ʒ 24 ad √ʒ 6, eſt proportio tanquam numeri ad numerum, uidelicet tanquam 4 ad 2: ſic proportio √ʒ 24 ad √ʒ 8, eſt proportio, tanquam non numeri ad numerum, uidelicet tanquam √ʒ 12 ad 2. Sic √ʒ 8 ad √ʒ 24 eſt proportio tanquam numeri ad non numerum, uidelicet tanquam

Рис. 3. Страница из «Общей Арифметики» Штифеля

И так далее до бесконечности[5]. В этих последовательностях нет движения, отметим, что здесь нет пропорциональности или закона прогрессии. Так определена эта последовательность»[3, с. 104][6].

Штифель показал, что множество рациональных и множество алгебраических иррациональных чисел на единичном отрезке бесконечно и счётно. Более того, его пример можно интерпретировать и как демонстрацию плотности этих чисел. Последовательность, приведённая им в конце, зависит от двух переменных – основания и показателя корня.

Далее Штифель переходит к трактовке иррациональных чисел Евклидом.

Галилео Галилей

Теоретико-множественные идеи Штифеля продолжил Галилео Галилей (1564–1642).

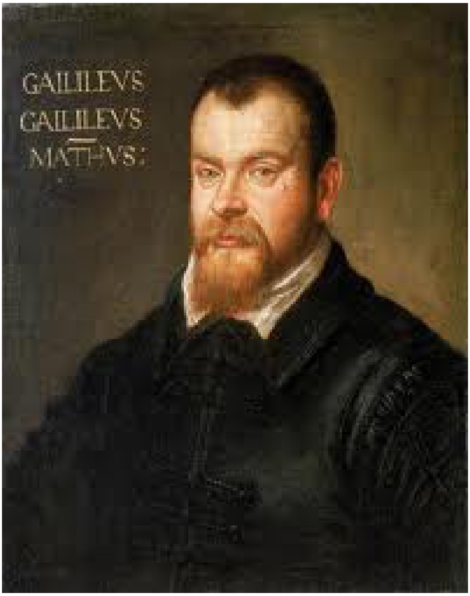


Рис. 4. Галилео Галилей

---

[5] Обозначения современные, Штифель для обозначения корней разной степени использовал коссические знаки.

[6] Перевод Г. И. Синкевич.

Прошло сто лет, в математику пришёл эксперимент, связь с механикой, физикой, астрономией. Рассуждение Галилея о числах опирается на примеры из оптики и механики.

В 1633 году в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», в главе «День первый», Галилей пишет: «Если я теперь спрошу вас, сколько квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень, и каждый корень имеет свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата.

DIALOGO
DE CECCO DI RONCHITTI
DA BRVZENE.
IN PERPVOSITO
DE LA STELLA NVOVA.

IN PADOVA,
Appresso Pietro Paolo Tozzi. M.DC.V.

Рис. 5. «Беседы» Галилея

Но если я спрошу, далее, сколько корней, то вы не станете отрицать, что их столько, сколько чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел, так как столько же корней, а корнями являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что всех чисел больше, чем квадратов, так как большая часть их не квадраты. Действительно, число квадратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывает по мере того, как мы переходим к большим числам; так, из чисел до ста квадратами являются десять, т. е. одна десятая часть; до десяти тысяч квадратами будет лишь одна сотая часть; до одного миллиона – только одна тысячная часть. А в отношении бесконечного числа, если бы только мы могли постичь его, мы должны были бы сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел.

Поскольку бесконечно много чисел вообще, бесконечно много квадратов, бесконечно много корней, то ни множество квадратов не меньше множества всех чисел, ни последнее не больше первого; в конечном выводе – свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеет места там, где дело идёт о бесконечности, и применимы только к конечным количествам» [5, с. 141].

Далее [5, с. 142–148] Галилей рассуждает о непрерывности, континууме и возможности сравнения бесконечного количества чисел, обращаясь к примерам физики.

Но должно было пройти ещё двести сорок лет, прежде чем эти идеи нашли своё воплощение в работах Дедекинда и Кантора.

Литература к I главе

1. *История Европы*. От Средневековья к Новому времени. – М.: Наука. – 1993. – Т. 3.

2. *Цейтен Г. Г.* История математики в XVI и XVII веках / Г. Г. Цейтен – М.-Л.: ГТТИ. 1933. – 430 с.

3. *Stifelio M.* Arithmetica Integra / M. Stifel. – Norimbergae. – MDXLIIII. – (1544 г.). – 327 p.

4. *История математики*. С древнейших времён до начала Нового времени. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука. – 1970. – Т. I – 351 с.

5. *Галилей Г.* Избранные труды в двух томах. – М.: Наука. – 1964 г. – Т. 2.

6. *Weierstrass K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner. – Archiv für mathematic. Band 9, 272 S. Reprint 1989.

7. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. Одесса: Матезис. – 1923 г. Пер. С. О. Шатуновского. – 4-е изд. исправл.

8. *Méray Ch.* Nouveau précis d’analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication : F. Savy. XXIII, – Paris, 1872. – 310 p.

9. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М., 1985. – 485 с.

10. *Матвиевская Г. П.* Развитие учения о числе в Европе до XVII века / Г. П. Матвиевская. – Ташкент: Фан, – 1971. – 231 с.

11. *Więsław W.* Matematyka I jej historia /W. Więsław . – Opole. 1997. – 416 s.

Глава II. ИСТОРИЯ ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ И ТЕОРЕМЫ БОЛЬЦАНО–КОШИ

Рассмотрим историю известной теоремы Ролля: «Если функция непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$, тогда в (a, b) найдётся хотя бы одна точка c такая, что $f'(c) = 0$ », а также историю связанной с ней теоремы о корневом интервале: «Если функция непрерывна на $[a, b]$ и имеет разные знаки на краях интервала, то в (a, b) найдётся хотя бы одна точка c такая, что $f(c) = 0$ ».

1690 год. М. Ролль и его метод каскадов

Мишель Ролль (Rolle, 1652–1719) родился во Франции в маленьком городке Амбер провинции Овернь в семье сапожника. В возрасте 23 лет приехал в Париж, где зарабатывал в качестве переписчика. Он достиг таких успехов в самообразовании в области математики, что в 1682 году решил трудную задачу Жака Озанама (1640–1717, Ozanam): «Найти такие четыре числа, что разность между двумя любыми из них была бы полным квадратом, и кроме того, попарные суммы первых трёх чисел тоже были бы полными квадратами». Сам Озанам полагал, что каждое из чисел имеет по крайней мере 50 знаков, но Ролль нашёл такие числа, каждое из которых имело не более 7 знаков. Это решение создало ему высокую репутацию математика, он был приглашён давать уроки сыну военного министра, получил пост в военном министерстве, пенсию от Людовика XIV, а в 1685 году избран в члены Королевской Академии наук [32].

Ролль занимался вопросами алгебры – диофантовым анализом, решением алгебраических уравнений. Он во многом популяризировал алгебраическую символику Р. Рекорда, и ввёл обозначение $\sqrt[n]{x}$.

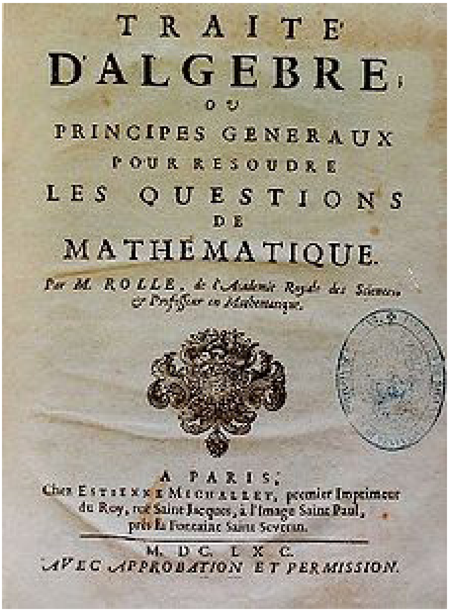
Ролль известен своими бурными нападками на дифференциальное исчисление и метод Декарта в недостаточной обоснованности. Вариньон и Сорен опровергли большинство доводов Ролля, и в 1705 году Академия признала неправоту Ролля, с чем он впоследствии согласился. Но эта дискуссия вынудила Лейбница излагать дифференциальное исчисление с большей строгостью.

Рис. 1. Мишель Ролль

История теоремы Ролля начинается с метода решения алгебраических уравнений, который Ролль назвал методом каскадов.

В 1690 году Ролль опубликовал «Алгебраический трактат» [1] о решении диофантовых и алгебраических уравнений произвольных степеней.

В изложении содержалось много новых идей, прогрессивных по отношению к таковому же методу Декарта, и как один из методов дан метод каскадов [1, с. 124–152], в основе которого лежит идея о том, что корни исходного уравнения разделены корнями вспомогательного, производного уравнения. Корни вспомогательного уравнения также можно отделить с помощью следующего вспомогательного, и так далее, образуя каскад, мы нисходим до линейного уравнения, решив которое, совершаем восхождение к исходному. Обоснование своего метода Ролль опубликовал годом позже в небольшой работе «Démonstration d’une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés» (1691).



TRAITE
D'ALGEBRE;
OU
PRINCIPES GENERAUX
POUR RESOUDRE
LES QUESTIONS
DE
MATHEMATIQUE.
Par M. ROLLE,

A PARIS;

M. DC. LXC.
AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

Рис. 2. Титульная страница трактата Роля

Его трактат сейчас оцифрован и доступен в Интернете. Заметим, что изложение Ролля вызывало упрёки современников и более поздних исследователей. В современной историко-математической литературе имеются простые реконструкции его метода, например [2].

Приведём здесь решение Ролля из его трактата [1, с. 124–126]:

$$v^4 - 24v^3 + 198vv - 648v + 473 \infty 0,$$

(в записи Ролля знак ∞ означает равенство, $\nu\nu$ означает ν^2).

Для ограничения корней он вводит большую гипотезу (Grande Hypothèse), малую гипотезу (Petite Hypothèse) и крайнюю гипотезу (Hypothèse extrême). Большая гипотеза – это величина, после которой нет ни одного корня полинома, она вычисляется как $\left(\frac{a}{c}+1\right)$, где a – это абсолютная величина наибольшего отрицательного коэффициента. Здесь $a = |-648| = 648$; c – коэффициент при старшей степени, здесь $c = 1$, следовательно, большое предположение для нашего уравнения равно 649. Ролль утверждал, что это верно для всех многочленов. Малая гипотеза – это число, меньшее любого из корней. Так как рассматривались только положительные корни, в качестве малой гипотезы брался ноль. Крайняя, или краевая гипотеза – это внутренняя граница, разделяющая корни вспомогательных уравнений, называемых каскадами. Все крайние гипотезы Ролль называет средними гипотезами (Hypothèses moyennes).

Итак, $v^4-24v^3+198v^2-648v+473=0$, все положительные корни расположены на интервале (0, 649). Задача, которая стоит перед Роллем, – разбить этот интервал на несколько меньших интервалов, каждый из которых содержит только один корень исходного уравнения, то есть выделить корневой промежуток.

Первое слагаемое имеет степень неизвестного, равную 4, Ролль умножает его на 4; второе слагаемое имеет степень 3, он умножает его на 3; третье слагаемое имеет степень 2, умножает его на 2; четвёртое слагаемое имеет степень 0, умножает его на 0. Далее он получает: $4v^4-72v^3+396v^2-648v=0$. Делит все члены уравнения на неизвестное v. Получает $4v^3-72v^2+396v-648=0$. Вновь умножает каждый член уравнения на показатель степени: $12v^3-144v^2+396v=0$ и делит на неизвестное: $12v^2-144v+396=0$. И ещё раз: $24v^2-144v=0$, $24v-144=0$, $4v-24=0$ (так в оригинале, равно как и далее).

Расположим каскады следующим образом:

Первый каскад: $4v-24=0$.

Второй каскад: $6v^2-72v+198=0$.

Третий каскад: $4v^3-72v^2+396v-648=0$.

Четвёртый каскад: $v^4-24v^3+198v^2-648v+473=0$.

Корни каждого каскада разделены корнями предыдущего, и все положительные корни лежат в (0, 649). Так как 6 – это корень первого каскада, то корни второго каскада лежат в (0,6) и (6, 13), причём в каждом интервале лежит только один корень, а число $13=\frac{|-144|}{12}+1$ – это большая гипотеза для данного уравнения, обозначения современные[7]. Будем искать только самый левый из корней, остальные вычисляются аналогично. Значения многочлена $6v^2-72v+198$ на краях интервала (0,6) имеют разные знаки; возьмём какое-нибудь среднее значение из интервала, не обязательно середину, и проверим знаки:

---

[7] Знак модуля ввёл Вейерштрасс.

$f_2(5)=-12<0$
$f_2(4)=6>0$

Следовательно, корень второго каскада лежит в (4;5). Продолжая итерации, или воспользовавшись известной формулой Виета, получим значение 6 – $\sqrt{3}$. Второй корень 6 + $\sqrt{3}$.

Следовательно, границы, в которых лежат корни третьего каскада, будут таковы:

$$\left(0,6-\sqrt{3}\right),\ \left(6-\sqrt{3},6+\sqrt{3}\right),\ \left(6+\sqrt{3},163\right)$$

причём в каждом из интервалов лежит только один корень. Здесь число $163=\dfrac{|-648|}{4}+1$ – большая гипотеза для третьего каскада. Будем искать только самый левый корень третьего каскада. Проверим знаки третьего каскада на краях этого интервала: они различны. Возьмём какую-либо среднюю точку из интервала $\left(0,6-\sqrt{3}\right)$ и вычислим значение $f_3(v)=4v^3-72v^2+396v-648$ · $f_3(0)=-648<0, f_3(5)=32>0,\ f_3(4)=40>0,\ f_3(3)=0.$

Следовательно, левый корень третьего каскада равен 3, отсюда левый (положительный) корень четвёртого каскада, то есть исходного уравнения, лежит в (0, 3). Вычислим значения $f_4(v)=v^4-24v^3+198v^2-648v+473$ на краях интервала и в некоторых средних точках: $f_4(0)=473>0, f_4(3)=-256<0, f_4(1)=0.$

Таким образом, мы нашли левый корень уравнения $v = 1$. Аналогично вычисляются и остальные корни. В случае приближённого вычисления процедура позволяет найти корень с точностью до любого десятичного знака. Для интервалов большой протяжённости Ролль прибегает к вспомогательному уравнению, сделав замену $v=\left(\dfrac{a}{c}+1\right)-x$, где $\left(\dfrac{a}{c}+1\right)$ – это большая гипотеза.

Кроме этого метода решения алгебраических уравнений, Ролль предлагает ещё четыре других, а также методы решения неопределённых уравнений и способ нахождения общего делителя многочленов.

Как видим, Ролль с помощью коэффициентов выделяет пределы, между которыми лежат корни. В методе каскадов, хотя и без терминологии дифференциального исчисления, он использовал принцип разделения корней многочлена корнями его производной, а существование корней проверялось различием знаков многочлена на краях интервала. В 1691 году в работе, посвящённой обоснованию метода каскадов «Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés», Ролль доказывал, что значения производной для двух соседних (однократных) корней целого многочлена имеют разные знаки [3, с. 47]. Возможно, Ролль был первым, кто сформировал понятие корневого интервала исходя из сравнения знаков уравнения.

1707 год. М. Ролль и И. Ньютон

До Ролля приближённое решение алгебраических уравнений производилось графическими методами, то есть путём пересечения кривых и с помощью простых итераций. Метод решения алгебраического уравнения с помощью вспомогательного уравнения меньшей степени в 1658 году использовал голландский математик И. Гудде (Hudde, 1628–1704)[8].

Рис. 3. Иоганн Гудде

---

[8] Реконструкция метода Гудде дана А. П. Юшкевичем в его комментариях к переводу Лопиталя «Анализ бесконечно малых» [4, С. 400].

Сам геометрический образ задачи не соответствовал поиску пересечения кривой с осью, а осуществлялся как поиск точек пересечения двух кривых. Поэтому образ графика, имеющего на краях отрезка ординаты разных знаков, в терминах алгебры возникнуть не мог. И. Ньютон (Newton, 1642–1727), например, представлял переменные как изменяющиеся во времени, а не в зависимости друг от друга [5]. Представление о линии как о геометрическом месте точек началось с работы Лопиталя о конических сечениях [5], было развито Эйлером, а общий подход сформировался лишь в XIX веке.

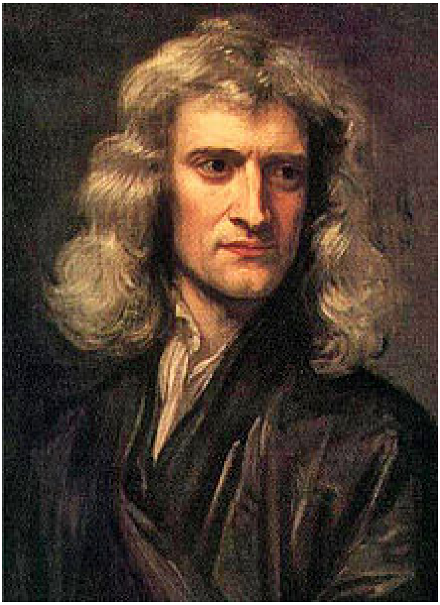


Рис. 4. Исаак Ньютон

Ньютон описал свой метод касательных в «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas» (1669 г., опубликован в 1711 г.) и в «De methodis fluxionum et serierum infinitarum» (1671 г., опубликован в английском переводе как «Method of Fluxions» в 1736 г.). Метод Ньютона был опубликован также в книге Дж. Валлиса 1685 года «A Treatise of Algebra both Historical and Practical». В 1690 в Англии опубликован трактат Дж. Рафсона (1647/48–1715) «Analysis Aequationum Universalis»[6], содержавший изложение метода Ньютона–Рафсона, или метода касательных. В 1707 году вышла книга Ньютона «Arithmetica Universalis» (Всеобщая арифметика), содержащая численные методы решения уравнений [7].

Ньютон, до появления «Трактата» Ролля, пользуясь методом касательных, не проверял знаки функции на краях интервала, что можно видеть, например, в «Method of Fluxions» [8] (1671 г.). Для определения отправной точки процедуры вычисления корня Ньютон использовал так называемый «параллелограмм Ньютона» или «многоугольник Ньютона».

Парижская академия и Лондонское королевское общество обменивались академической литературой. Несомненно, Ньютон получил «Трактат» Ролля, более того, он включил изложение его метода в своё издание 1707 г. «Всеобщей арифметики» [7, с. 267–270], правда, без указания авторства Ролля. Заметим, что Ролль при локализации корня пожалуй, впервые, проверяет знаки полинома на краях интервала, и Ньютон впервые начинает делать такую проверку во «Всеобщей арифметике» 1707 года. Способ сужения интервала, содержащего корень, с помощью проверки знака левой части уравнения (полинома) в некоторой внутренней (не обязательно средней) точке встречается у Ролля, пожалуй, впервые. Больцано формализовал его 117 лет спустя как метод половинного деления. Добавим, что Ньютон все рассматриваемые функции полагал определёнными по непрерывности, а Ролль рассматривал только многочлены, являющиеся непрерывными функциями.

Метод Ньютона и использование разложения в ряды Маклорена пользовались большей популярностью у континентальных математиков. В 1740 году Т. Симпсон дал обобщённое описание метода Ньютона в работе «Опыт некоторых вопросов теоретической и разнородной математики» («Essay on several subjects in speculative and mixed mathematics») [9].

1696 год. Г. Ф. Лопиталь (1661–1704)

В 1696 году в Париже вышел первый учебник математического анализа «Анализ бесконечно малых для исследования кривых» ([4 – русский перевод, [10] – французское издание 1716 г.]) маркиза Г. Ф. де Лопиталя (L'Hôpital, 1661–1704), представлявший собой записи лекций И. Бернулли (Bernoulli, 1667–1748). В нём впервые систематически изложена теория дифференциального и интегрального исчисления, использованы понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек. Правда, лёгкости и доступности изложения Лопиталь достигает за счёт пренебрежения обоснованиями: «Я убеждён, что в вопросах математики полезны лишь выводы и что книги, излагающие только подробности или частные предложения, заставляют лишь терять время тех, кто их пишет, и тех, кто их читает»[4, с. 57]. Но он даёт геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Здесь же приведено такое рассуждение: «Всякая непрерывно возрастающая или убывающая величина не может превратиться из положительной в отрицательную, не проходя через бесконечность или через нуль, а именно: через нуль – когда она сначала убывает, и через бесконечность – когда она сначала возрастает. Отсюда следует, что дифференциал наибольшей или наименьшей величины должен равняться нулю или бесконечности. Легко можно понять, что непрерывно убывающая величина не может из положительной стать отрицательной, не проходя через нуль; но не так очевидно, что при возрастании она должна пройти через бесконечность» [4, с. 130–132].

Рис. 5. Гийом Франсуа маркиз де Лопиталь

С этой книги начался наивный период математического анализа, в котором все функции были непрерывными, потому что, как правило, были целыми алгебраическими. Сами правила дифференциального исчисления XVII–XVIII века были определены лишь для алгебраических функций, формулы производных трансцендентных функций появятся позже в работах Эйлера и Коши.

1708 год. Метод Ролля в трактате Ш.-Р. Рейно

Труды Гудде, Декарта, Ролля, Ньютона, Лейбница, Бернулли и Лопиталя хорошо знал французский проповедник и профессор философии Ш.-Р. Рейно (Reynaud, 1656–1728). Будучи знаком с упрёками в недостаточности обоснования и систематического изложения, он поставил себе целью «дать полный курс Анализа, Алгебры и Геометрии в их взаимосвязи, с доказательствами». В 1708 году в Париже вышла его книга «Доказательный Анализ» [11] с изложением их результатов, в двух томах.

Первый том посвящён алгебраическим вопросам, второй – дифференциальному и интегральному исчислению, причём большинство утверждений автор обосновывает, даёт большое количество примеров, не только математических, но и из области механики и астрономии. Примечания ко второму изданию 1736 года написал Вариньон. В первом томе рассмотрены решения численных и буквенных алгебраических уравнений – начиная с линейных и до некоторых уравнений шестой степени в радикалах и приближённо, приведена основная теорема алгебры.

Рейно подходит к решению алгебраических задач методически, сначала рассматривая линейные уравнения, составляя уравнения высших степеней перемножением двучленов, приводит основную теорему алгебры, теорему о значении остатка многочлена на двучлен[9] [11, т. I, с. 270–271]. Его доказательства представляют собой рассуждения с демонстрацией частных случаев и показ примеров. В алгебраических уравнениях Рейно различает случаи однократных, кратных, положительных, отрицательных, целых, дробных, неизмеримых, а также мнимых корней.

---

[9] Эта теорема носит имя Безу (Bezout, 1730–1783). Эта же теорема встречается и у Рафсона.

Рейно посвящает большой раздел [11, т. I, с. 269–375] методу Ролля: «В шестой книге объяснён и доказан метод нахождения величин, которые являются пределами неизвестных в степенном уравнении (господин Ролль является автором этого метода), и даётся несколько способов решения с помощью этих пределов, причём корни могут быть вычислены с любой желаемой точностью» [11, т. I, с. XII].

Рейно использует свою терминологию, отличную от Ролля. Каждое вспомогательное уравнение, корнями которого являются границы корней предыдущего уравнения, он называет уравнением пределов (l'équation des limites), а границы корневого интервала называет пределами корней. Рейно определяет корневой интервал, содержащий действительный корень, по отличию знаков левой части уравнения на пределах корней, описывает восходящую и нисходящую процедуры по Роллю. Второй том посвящён дифференциальному и интегральному исчислению, и среди других утверждений встречается то, что касательная к кривой в некоторой точке параллельна диаметру (для конических сечений, [т. 2, с. 176], а также, что ряд значений некоторой переменной, например, подкасательной[10], сначала положителен, а затем становится отрицательным, он проходит некоторую точку, в которой значение равно нулю или бесконечности [11, т. 2, с. 177].

1727–1729 годы. Теорема Ролля у Дж. Кемпбелла и К. Маклорена

«Доказательный анализ» Рейно был известен в Англии. Его цитирует Дж. Кемпбелл[11] в 1727 году в работе «Метод определения количества невозможных[12] корней в низших уравнениях» [12]. Кемпбелл переводил французские математические сочинения на английский язык, и сам занимался решением алгебраических уравнений. В упомянутой работе он пересказывает процедуру Ролля, привлекает метод максимумов и минимумов Ферма, и рассматривает случай финального квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Тогда можно по перемене знаков

---

[10] Подкасательной называется проекция отрезка касательной между точками пересечения с осью *OX* и точкой касания на ось *OX*.

[11] Об этом шотландском математике известно лишь, что он полемизировал с К. Маклореном и умер в 1766 г.

[12] Мнимых.

коэффициентов исходного уравнения назвать количество мнимых корней, точнее, их наименьшее количество. По поводу строгости доказательств с ним полемизирует Колин Маклорен (Maclaurin, 1698–1746) в своём письме [13] в этот же журнал. Он формулирует следующую теорему: «Корни уравнения $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}\,\&c.=0$ являются пределами корней уравнения $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3}\,\&c.=0$» [13, с. 88]. Перемена знаков перед коэффициентами обеспечивает n положительных корней. Это утверждение уже имеет статус теоремы. Маклорен рассматривает также более общий вид вспомогательного уравнения, использованный Гудде в 1658 году.

Рис. 6. Колин Маклорен

1746 год. А. К. Клеро

В 1746 году вышла книга А. К. Клеро (Clairaut, 1713–1765) «Основы алгебры» [14], в которой рассказывается о методах решения алгебраических уравнений. Большое внимание уделено методу Ньютона и Маклорена, но ни слова о Ролле и его методе.

Рис. 7. Алексис Клеро

1755 год. Теорема Ролля у Л. Эйлера

В 1755 году Петербургская академия наук опубликовала сочинение Л. Эйлера (1707–1783) «Наставление по дифференциальному исчислению» [15] (Institutiones calculi differentialis). Тенденция сближения алгебры и анализа, которую мы видели в трактате Рейно, привела к расширению понятия функции, а вместе с ним и к новому понятию непрерывности. Эйлер гордится тем, что при изложении анализа ему не требуется обращаться к прикладной интерпретации. В IX главе он пишет: «Понятие уравнения можно свести к понятию функции» [15, с. 367]. Эйлер повторяет теорему Маклорена, приведённую выше, о корнях уравнения $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + dx^{n-4} - и\, т.д. = 0$, которые разделены корнями производного уравнения, то есть экстремумами. Заметим, что и Маклорен, и Эйлер рассматривали уравнение, заведомо имеющее *n* действительных корней. Проблема определения количества мнимых корней, поставленная Кемпбеллом, рассмотрена Эйлером в XIII главе. Эйлер обобщает своё рассуждение:

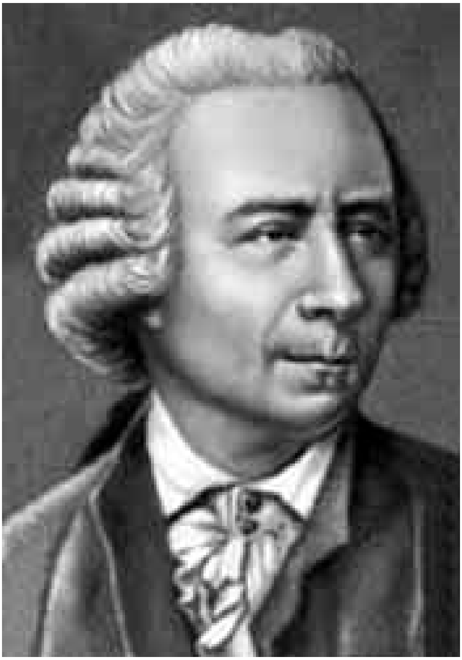


Рис. 8. Леонард Эйлер

«Из сказанного, впрочем, ясно, что если у предложенного уравнения и не все корни действительны, всё же всегда между какими-либо двумя корнями имеется максимум или минимум. Обратное же утверждение вообще несправедливо, т. е. между двумя какими-либо максимумами или минимумами может не содержаться действительный корень. Это заключение, однако, можно сделать, если добавлено условие, что одно из значений *z* будет положительным, а другое отрицательным […]. Между двумя действительными корнями уравнения существует одно значение, при котором функция становится максимумом или минимумом» [15, с. 435–436]. Обоснование Эйлера основано на представлении о непрерывном движении, он переносил на функции все свойства алгебраических выражений.

1797 год. Теорема о корневом интервале в «Основах алгебры» С. Ф. Лакруа

В 1797 году в Париже вышло первое издание «Основ алгебры» [16] С. Ф. Лакруа (Lacroix, 1765–1843), автора многократно переизданных курсов высшей математики. В университетах Российской империи XIX века читали математику по Лакруа.

Рис. 8. Сильвестр Франсуа Лакруа

В «Основах алгебры» он приводит следующую теорему о корневом промежутке:

«Если имеются две величины, которые, будучи подставленными в уравнение вместо неизвестной, дадут два результата противоположного знака, мы можем заключить, что корни данного уравнения находятся между этими величинами, и они действительны» [16, с. 298].

В 1811 году в Майнце вышел авторизованный немецкий перевод «Основ алгебры» [17] Лакруа, сделанный М. Меттернихом (Metternich, 1747–1825), профессором математики и физики университета Майнца. В этой книге также изложена теорема о корневом интервале. Эта книга многократно переиздавалась на немецком языке.

1768 год. А. Г. Кёстнер о выделении корневого интервала

Рис. 9. Авраам Готтфельд Кёстнер

Авраам Готтфельд Кёстнер (Kaestner, 1719–1800), профессор математики и физики в Геттингене, известный методист вопросов анализа. Отметим, что он ещё до Коши рассматривал иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей. Кёстнер состоял в переписке с Эйлером. Заметим, что авторитет Эйлера у немецкоязычных авторов курсов анализа и алгебры XIX века был чрезвычайно высок, его результаты часто использовались.

Кёстнер написал в 1768–69 году курс «Основы математики» («Der mathematischen Angfangsgründe») [18] в четырёх томах, превосходный методически, с хорошим историческим обзором методов, многократно переиздававшийся. В курсе отчётливо видно влияние Эйлера. Курс Кёстнера был издан на русском языке в 1792–1803 годах. Метода Ролля у Кёстнера нет, но есть теорема о корневом интервале многочлена с доказательством, использующим геометрическую аналогию. Приведём её по немецкому изданию 1794 года: «Теорема. Если y положителен для $x = a$, и отрицателен для $x = c$, то между a и c найдётся хотя бы одно значение $x = b$, для которого $y = 0$» [18, с. 198].

1798 год. Ж. Л. Лагранж о методе Ролля

Рис. 10. Жозеф Луи Лагранж

В 1798 году Ж. Л. Лагранж (Lagrange, 1736–1813) предложил свой метод отделения корней. Лагранж утверждает, что корни исходного уравнения разделены корнями производного уравнения, и характеризуются подстановкой корней производного уравнения в исходное уравнение и определением его знака. «Таким образом, эти правила позволяют не только определять число действительных корней уравнения, но и границы, в которых они лежат; и если вы хотите ограничить корни между величиной, большей, нежели α_1 и меньшей, нежели ν_1, нужен дополнительный поиск, по методу, изложенному в главе IV (№ 12), о границах положительных корней данного уравнения.

Заметим, что эти правила, позволяющие найти эти пределы и изложенные нами по Ньютону и Маклорену, были известны ещё Роллю, что видно из V и VI глав его Алгебры» [19, с. 199].

1817 год. Б. Больцано и теорема о корневом интервале

Рис. 11. Бернард Больцано

Бернард Больцано (Bolzano, 1781–1848), чешский математик и философ, сделал немалый вклад в развитие понятия непрерывного и бесконечного. В его рукописи 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [20], он критикует предложенные доказательства Кёстнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха,Реслинга и других математиков за привлечение геометрических и физических образов (времени и движения) и отсутствие аналитического рассуждения, то есть понимания непрерывности как математического понятия. Правда, как нам удалось убедиться, ни Клеро в упомянутом труде 1746 года, ни доктор Эрлангенского университета Х. Л. Реслинг (Ch. L. Rösling, 1774–1836) в своей книге 1805 года «Основы учения о формах, дифференциалах, производных и интегралах функций» [21] не обращаются к методу Ролля и его теореме о корневом промежутке. Приведённые Больцано ссылки на них не соответствуют заявленной теме [20, с. 171].

Закон непрерывности Больцано формулирует так: «Функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, лишь то, что если x какое-нибудь из этих значений, тогда разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим» [20, с. 174–175].

Больцано придаёт большое значение теореме о корневом промежутке, полагая её лежащей в основе теоремы о разложении многочлена на множители и теоремы о среднем значении Лагранжа. Он доказывает её с помощью предположения о существовании верхней границы области, при этом использует во вспомогательной теореме метод половинного деления интервала. Больцано доказывает вспомогательную теорему: «Если две функции x, $f(x)$ и $\varphi(x)$, либо для всех значений x, либо для всех, которые лежат между α и β, изменяются по закону непрерывности, если далее $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ и $f(\beta)>\varphi(\beta)$, то имеется всякий раз значение x, лежащее между α и β, для которого будет $f(x) = \varphi(x)$» [20, с. 198]. После этого Больцано доказывает теорему о корневом интервале. Здесь же Больцано формулирует ещё одну теорему: «Переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает в качестве значения каждое промежуточное число». Больцано подчёркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

Тогда же в этой работе Больцано формулирует критерий сходимости последовательстей.

1821 год. О. Л. Коши, теорема о корневом промежутке в «Курсе анализа»

Рис. 12. Огюстен Луи Коши

В 1821 году О. Л. Коши (Cauchy, 1789–1857) издал «Курс анализа» [22, сер. 2, т. 3], прочитанный в Политехнической школе.

Коши вводит определение непрерывной функции: «Функция $f(x)$, данная между двумя известными пределами переменной x, является непрерывной функцией этой переменной, если для всех значений переменной x, взятой между этими пределами, численное значение разности $f(x+\alpha)-f(x)$ бесконечно уменьшается вместе с α. Иными словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной для x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной всегда влечёт бесконечно малое приращение самой функции. Добавим также, что функция $f(x)$, непрерывная для x, будет непрерывна и для соседних (voisinage) значений переменной x, лежащих между этими же пределами, как бы близко к этим пределам ни находился *x*» [22, с. 43].

Он не упоминает имени Ролля, хотя уделяет внимание приближённому решению алгебраических уравнений. В главе о решении уравнений [22, с. 378] он приводит следующую теорему:

«Пусть функция $f(x)$ действительной переменной *x* непрерывна между пределами $x=x_0$, $x=X$. Если $f(x_0)$ и $f(X)$ имеют противоположные знаки, то уравнению $f(x)=0$ может удовлетворять по крайней мере одно или несколько (нечётное количество) действительных значений *x*, расположенных между x_0 и X».

Что очень важно для анализа, Коши формулирует теорему о среднем значении: как свойство непрерывной функции «Теорема о непрерывной функции».

Если функция $f(x)$ – непрерывная функция переменной *x* между пределами $x = x_0$, $x = X$ и b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X»[20, с. 50].

Коши приводит несколько методов решения алгебраических уравнений, в том числе метод Декарта, сравнивает методы Ньютона и Лагранжа на примере одного (кубического) уравнения, но ничего не говорит о разделении корней уравнения корнями производной.

В 1823 году в Курсе анализа Коши появляется теорема его имени.

Заслугой Коши является гениальная обработка результатов предшественников – Ньютона, Лейбница, Лагранжа и Больцано. В его лекциях математический анализ приобрёл форму законченного курса.

1834 год. Теорема Ролля у М. В. Дробиша

В 1834 году профессор университета в Лейпциге М. В. Дробиш (Drobisch, 1802–1896) выпустил «Лекции по уравнениям высших порядков» [23], где в §107 [23, с. 161] рассказывает о методе каскадов Ролля. Он сетует на сложное изложение Ролля, но называет его метод достойным уважения, и обосновывает его: «Эти теоремы (правила) получены в незавершённом виде в предложенном проекте Ролля, притом практически крайне затруднительном для понимания, методе каскадов. В нём есть существенное зерно, что для решения исходного уравнения друг за другом формируются производные уравнения, что похоже на строительство дома таким методом. Таким образом мы последовательно получаем корни уравнений низшего порядка, которые дают нам достоверные пределы корней уравнений высшего порядка, и которые мы вычисляем приближённо, что изложим позже, вплоть до корней исходного уравнения. Этот метод основан на предположении, что исходное уравнение вообще имеет корни. Это обусловливает его ограниченность и непрактичную громоздкость, вместо поиска более прямого пути» [23, с. 186–188].

Рис. 13. Морис Вильгельм Дробиш

Дробиш цитирует теорему о корневом интервале из курса Коши и его теорему о среднем значении [23, с. 161], в седьмой главе «Альтернативный метод распознавания действительных и мнимых корней» [23 с. 176] Дробиш рассказывает о методе каскадов Ролля. Он рассматривает исходное уравнение вида $f(x) = 0$, первое производное уравнение $f'(x) = 0$ и приводит теоремы.

«Два близлежащих действительных корня разделены корнем производной уравнения, корни которой разделяются корнями следующей производной. Теорема 1. Между двумя ближними действительными корнями исходного уравнения лежит по крайней мере один действительный корень производной; однако между ними также может находиться 3, 5, и т. д. вообще любое нечётное количество корней. Теорема 2. Между двумя ближними действительными корнями производного уравнения лежит не более одного корня первоначального уравнения, однако также может быть, что между ними совсем нет корней. Теорема 3. Не менее чем один действительный корень исходного уравнения может быть больше, чем наибольший действительный корень производного уравнения; не более чем один действительный корень первоначального уравнения меньше чем наименьший корень производного уравнения; однако может быть, что нет никакого действительного корня исходного уравнения больше большего корня и меньше меньшего корня производного уравнения. В этом последнем выводе мы соединили две половины 2-го следствия, то есть наибольший корень исходного уравнения может лежать между первым и вторым, или между вторым и третьим, третьим и четвёртым и т. д. корнем производного уравнения[13]» [23, с. 178–179].

1846 год. Дж. Беллавитис и метод Ролля

В 1846 году итальянский математик Дж. Беллавитис (G. Bellavitis, 1803–1880) описывает метод Ролля в своей книге «Простой способ нахождения действительных корней алгебраических уравнений и новый метод определения мнимых корней» [24].

1861 год. Теорема Ролля у К. Вейерштрасса

Представление о непрерывных функциях резко изменилось в середине XIX века с появлением новых математических объектов – рядов Фурье, необходимостью исследовать множество точек разрыва и оценивать их количество, а также возможностью пренебрежения ими. Новое

---

[13] Изложено в соответствии с Lagrange’s Résolution de l’équat. Numér. Not. VIII, возможно первого изобретателя того и другого, из вышеупомянутых тезисов, опирающихся на достойное уважения правило Ролля. – *Примечание В. Дробиша.*

определение непрерывности функции на языке «ε–δ» ввёл Карл Вейерштрасс (Weierstrass, 1815–1897) в 1861 году [25], дальнейшее развитие этих идей было сделано в работах Э. Гейне (Heine, 1821–1881) и Г. Кантора (Cantor, 1845–1918) в 1870-х годах.

Рис. 14. Карл Вейерштрасс

В летнем семестре 1861 года Карл Вейерштрасс читал курс лекций по дифференциальному исчислению в Королевском промышленном институте Берлина. Герман Шварц сохранил конспект этих лекций [26], опубликованный Пьером Дюгаком [27].

Вейерштрасс определяет непрерывные функции, выводит их свойства. «Если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x + h$ функция переменится и будет $f(x + h)$; разность $f(x+h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x + h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению ещё меньших, чем δ, $f(x + h) - f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – непрерывная функция аргумента, или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом» [28, с. 189].

Под заголовком «Исследование хода функций» приводится следующая теорема: «Если для двух определённых значений x_1 и x_2 аргумента $f(x_1) = f(x_2)$, *то между* x_1 *и* x_2 обязательно имеется по меньшей мере одно значение x_0, *для которого первая производная* $f'(x)$ равна нулю». Как полагает А. П. Юшкевич, «это первая или одна из первых формулировок так называемой теоремы Ролля» [28, с. 192].

Позже, в 1886 году, Вейерштрасс, анализируя расширение понятия функции, писал, что сначала рассматривались только функции, представленные рациональным числовым выражением, например, рядом с рациональными коэффициентами. Они изменялись по закону непрерывности, и тем исчерпывалось всё наше понятие о функции. Но открытие рядов Фурье показало, что это не так, существуют непрерывные функции, которые не могут быть получены прежним способом задания. Для строго определённой непрерывной функции всегда можно найти математическое выражение. Благодаря этому можно вывести свойства любой функции из основных понятий непрерывности, так как в любом научном исследовании важно извлекать из основных понятий дальнейшие последующие» [29, с. 21].

Теорема о корневом промежутке, теорема о среднем, теорема о корне производной приобрели статус свойств непрерывных функций. Если во времена Коши таковых свойств было около четырёх, то у Дини их уже одиннадцать.

1878 г. Теорема Ролля у У. Дини

В 1878 году вышел «Курс лекций по теории функций действительного переменного» [30] У. Дини (Dini, 1845–1918), профессора университета в Пизе. В этом курсе впервые вводится определение непрерывной функции через односторонние пределы. Теорема Ролля, без указания его имени, сформулирована так: «Если в интервале (α, β) функция $f(x)$ конечна и непрерывна, и во всех точках, кроме краёв интервала, имеет конечную и определённую, либо бесконечную и определённую производную, и кроме того в крайних точках a и b принимает одинаковые значения, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка x', для которой $f'(x') = 0$» [30, с. 76–77].

Рис. 15. Улисс Дини

1879 год. Теорема Ролля у Г. Кантора

В период с 1874 по 1884 год Кантор написал свои основные статьи по теории множеств [31]. В 1872 году он создаёт свою теорию иррациональных чисел, в 1874 доказывает счётность множества алгебраических чисел, в 1878 формирует понятие мощности и рассматривает проблему сравнения по мощности непрерывных многообразий любого числа измерений, получив парадоксальный вывод, что все они имеют одинаковую мощность и эквивалентны единичному отрезку. «Я вижу, но не верю», – писал Кантор Дедекинду. Кантор приходит к выводу, что понятие размерности должно опираться на взаимно непрерывное отображение многообразий друг на друга.

Рис. 16. Георг Кантор

В 1879 году Кантор хочет доказать теорему о том, что два непрерывных многообразия M_μ и M_ν разных порядков μ и ν, где $\mu < \nu$, нельзя отобразить друг на друга непрерывно и двусторонне однозначно. Кантор использует для доказательства теорему Ролля о корневом интервале. Эта попытка доказательства изложена им в статье «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten, перевод Ф. А. Медведева) [31, с. 36–39].

Кантор раскладывает точки непрерывного многообразия M_μ на два класса: внутренние точки и граничные точки.

«Точка p из M_μ называется внутренней, если вокруг p как из центра можно описать сферу $K_{\mu-1}$ со столь малым r, что все точки, расположенные внутри и на $K_{\mu-1}$, принадлежат области M_μ; всякая точка p из M_μ, для которой такая конструкция невозможна, будет причисляться к границе M_μ. Полная граница непрерывной области M_μ есть область более низкого порядка, которая или образует один непрерывно связанный кусок, или состоит из нескольких таких отдельных кусков».

Далее из теоремы Ролля о корневом интервале Кантор получает следующую теорему:

«Если $K_{\mu-1}$ – сфера ($\mu - 1$)-го порядка, расположенная в M_μ, a – точка внутри $K_{\mu-1}$, b – точка вне $K_{\mu-1}$ и N – какая-либо непрерывно связная область (любого порядка) внутри M_μ, содержащая обе точки a и b, то существует по крайней мере одна точка с, одновременно принадлежащая областям $K_{\mu-1}$ и N». Далее на основании этой теоремы Кантор пытается доказать основную теорему (о размерности), но его доказательство не было полным[14]. Но теорема о корневом интервале приобретает у него фундаментальный смысл для понятия непрерывности.

1886 год. К. Вейерштрасс и обоснование непрерывности

В летнем семестре 1886 года Вейерштрасс читал лекции по обоснованию теории аналитических функций. Он стремился дать систематическое обобщение всем появившимся за два прошедших десятилетия результатам – создание Кантором теории множеств, новой концепции действительного числа Дедекинда, Гейне и Кантора, новому пониманию непрерывности. На основе понятия предельной точки Вейерштрасс развивает понятие точной верхней границы[15], используя теорему о корневом интервале. На её основе он вводит понятие связности: «исходя из любой точки континуума, мы всегда в нём и останемся» [29, с. 70]. В VIII и XI главах мы рассмотрим его концепцию подробнее.

Заключение

Таким образом, анализ алгебраического уравнения привёл к формулировке двух фундаментальных утверждений теории функций – теоремы

---

[14] Первое удовлетворительное доказательство общей теоремы, что многообразия различного числа измерений нельзя отобразить друг на друга одновременно взаимно однозначно и взаимно, непрерывно дал Л. Э. Я. Брауэр в «Math. Ann.» 1910, Bd. 70, s. 161–165.

[15] При этом Вейерштрасс использует методы вариационного исчисления.

о корневом промежутке и теоремы о корне производной, и созданию теоремы о среднем значении. Теорема о корневом промежутке в русской литературе у разных авторов названа и теоремой Ролля (Шатуновский [33, с. 121–122]) и теоремой Больцано–Коши (Фихтенгольц [34, с. 128]). Теорема о среднем значении называется второй теоремой Больцано–Коши [34, с. 131].

За триста лет сформировалась одна из самых фундаментальных теорем анализа, имеющая не только большое методологическое, но и прикладное значение, например, в дифференциальной геометрии, функциональном анализе, механике. Н. Н. Лузин с её помощью доказывал теорему о соприкасающемся круге и теорему о центре кривизны [35]. Первоначально предназначенная для многочленов, теорема Ролля была распространена на непрерывные функции, обогатив их свойства. Н. Н. Лузин говорил, что «эта теорема лежит в основании теоретического развития дифференциального и интегрального исчисления» [35, с. 316].

Литература ко II главе

1. *Rolle M.* Traité d’algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique. – Paris, 1690. – 272 p.

2. *Washington Ch.* Michel Rolle and his Method of Cascades. Электронный ресурс: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf.

3. *История математики*. – М., 1970. Т. 2. – 300 с.

4. *Лопиталь Г. Ф.* Анализ бесконечно малых / пер. с фр. Н. В. Леви под ред. и со вступительной статьёй А. П. Юшкевича. – М.; Л., 1935 – 431 с.

5. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Из прошлого аналитической геометрии. – 1952. – Электронный ресурс: http://wikilivres.ca/wiki/%D0%98%D0%B7_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%88%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B8#cite_ref-10

6. *Raphson J.* Analysis Aequationum universalis. 2 ed. – London, 1702. – 170 P.

7. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика или книга об арифметическом синтезе и анализе, пер. А. П. Юшкевича. – М., 1948. – 442 с.

8. *Newton I.* Method of fluxions. – London, 1786.

9. *Simpson T.* Essays. – London., 1740. – 144 p.

10. De L‘Hôpital. Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes. Paris.,1696. Электронный ресурс: издание 1716 года http://ia600204.us.archive.org/9/items/infinimentpetits1716lhos00uoft/infinimentpetits1716lhos00uoft.pdf

11. *Reynaud Ch.-R.* Analyse Démontrée. – Paris, 1708. T. I, II. – 2-е изд. с примечаниями Вариньона, 1736.

12. *Campbell G.* A Method for Determining the Number of Impossible Roots in Adfected Aequations. Philisorhical Transactions of Royal Society. – London., 1727/28. – 35. – P. 515–531.

13. A second letter from Mr. Colin Mac Laurin, concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of on ther Rulel in Algebra // Phylosophical Transactions of Royal Society. – London, 1729. – 36. – P. 59–96.

14. *Clairaut A. C.* Élémens d`Algèbre. – Paris, 1746. – 349 p.

15. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. – М.–Л., 1949. – 580 с.

16. *Lacroix S. F.* Élémens d’algèbre, à l’usage de l’Ecole centrale des Quatre-Nations. 15 ed. – Paris, 1830.

17. *Lacroix S. F.* Metternich M. Anfangsgründe der Algebra. – Meinz. – 596 p.

18. *Kaestner A. G.* Angfangsgründe der Analysis endlicher grössen. – Göttingen, 1794. – 590 s. – S. 198.

19. *Lagrange J.-L.* Traité de la resolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques. Oeuvres complétes. – Paris, 1867–1892. – T. 8. – P. 11–367.

20. *Больцано Б.* Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. М., 1955. – С. 170–204.

21. *Rösling Ch. L.* Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen. Erlangen, 1805. – 456 s.

22. *Cauchy A.* Course d’analyse de l’Ecole rouale polytechnique. Premiere partie: Analyse algébrique // Oeuvres complètes. Série 2, tome 3. – Paris., 1882. 1974. – 471 S.

23. *Drobisch M. W.* Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen. – Leipzig, 1834. – 386 S.

24. *Bellavitis G.* Sul piu facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie memoria. – Venezia, 1846. – 111 P.

25. *Синкевич Г. И.* К истории эпсилонтики // Математика в высшем образовании. – 2012. – 10. – С. 149–166.

26. *Karl Weierstrass.* Differentialrechnung. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. 1861 von H. Schwarz.

27. *Dugac P.* Eléments d’analyse de Karl Weierstrass. – Paris, 1972.

28. *Хрестоматия по истории математики*. Математический анализ / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.

29. *Weierstrass K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner. – Archiv für mathematic. Band 9, 272 S. Reprint 1989.

30. *Dini U.* Fondamenti per la theorica delle funzioni di variabili reali. – Pisa, 1878. – 416 P.

31. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 485 с.

32. *Fontenelle B.* Eloge de M. Rolle / Bernar Le Bouyer de Fontenelle // Histoire de l`Académie Royale des sciences. – Paris, 1719. – P. 94–100.

33. *Шатуновский О. С.* Введение в анализ. – Одесса, 1923. – VIII + 244 с.

34. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. – 6 изд. – М., 1968. – Т. I. – 440 с.

35. *Лузин Н. Н.* Дифференциальное исчисление. М., 1961. – 478 с.

Глава III. ЗАКОН НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТ АРИСТОТЕЛЯ ДО Г. ЛЕЙБНИЦА

Непрерывное и дискретное входило в круг внимания учёных с античности. В Древней Греции философы рассматривали вопрос делимости пространственно-временных объектов. Демокрит, Левкипп, Лукреций склонялись к атомизму, дискретному представлению о мире; Аристотель различал следующее по порядку, соприкасающееся и непрерывное. Парменид и Гераклит утверждали непрерывность бытия. Апории Зенона Элейского (490 до н. э. – 430 до н. э.) показали противоречивость представлений о непрерывном и дискретном. Из 40 его апорий до нас дошли только девять. Приведём некоторые из них здесь.

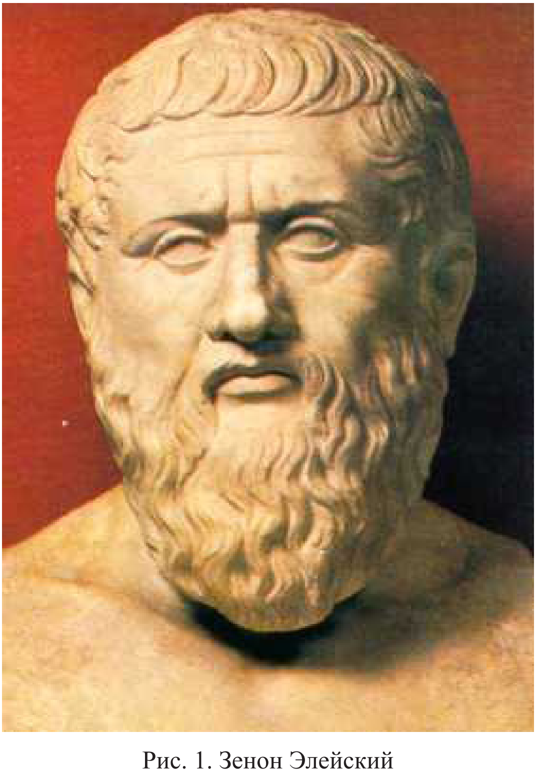


Рис. 1. Зенон Элейский

1. Быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху, если в начале движения черепаха находится впереди Ахиллеса.

Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

2. Дихотомия – чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути, а чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины, и так до бесконечности.

3. Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть не существует момента времени, в котором стрела совершает движение.

4. Стадион (ристалище).

5. Пусть по стадиону движутся по параллельным прямым равные массы с равной скоростью, но в противоположных направлениях. Пусть ряд $А_1$, $А_2$, $А_3$, $А_4$ обозначает неподвижные массы, ряд $В_1$, $В_2$, $В_3$, $В_4$ – массы, движущиеся вправо, а ряд $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$ – массы, движущиеся влево. Будем теперь рассматривать массы $А_i$, $В_i$, $Г_i$ как неделимые. В неделимый момент времени $В_i$ и $Г_i$ проходят неделимую часть пространства. Действительно, если бы в неделимый момент времени некоторое тело проходило бы более одной неделимой части пространства, то неделимый момент времени был бы делим, если же меньше, то можно было бы разделить неделимую часть пространства.

Рассмотрим теперь движение неделимых $В_i$ и $Г_i$ относительно друг друга: за два неделимых момента времени $В_i$ пройдёт две неделимые части $А_i$ и одновременно отсчитает четыре неделимые части $Г_i$, то есть неделимый момент времени окажется делимым.

Апория направлена против представления о мере отрезка как о сумме мер неделимых.

Литература, посвящённая преодолению парадоксов (апорий), неисчислима. Благодаря этим апориям не угасает интерес к проблеме непрерывности пространства–времени–движения.

Первым при анализе апорий Зенона предложил принцип непрерывности Аристотель в книге «Физика». По Аристотелю, непрерывность – это определённый тип связи элементов системы, иной, нежели два других типа связи – последовательность и касание. Последовательность есть условие смежности (касания), а она, в свою очередь, есть условие непрерывности. Если предметы соприкасаются, но при этом сохраняют каждый свои края, так что соприкасающиеся границы не сливаются в одну общую, то мы имеем дело со смежностью; если же граница двух предметов (отрезков линии, «частей» времени и т. д.) оказывается общей, то тут речь идет о непрерывности. «Я говорю о непрерывном, – пишет Аристотель, – когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается...» [Аристотель. Физика. Кн. 5, с. 226б–227d.]. Подлинно непрерывным Аристотель считал то, что непрерывно по движению. Говоря об апории Зенона «Дихотомия», Аристотель приводит своё толкование непрерывности: «Если, взявши от конечной величины определенную часть, снова взять ее в той же пропорции, т. е. не ту же самую величину, которая взята от целого, то конечную величину нельзя пройти до конца; если же настолько увеличивать пропорцию, чтобы брать всегда одну и ту же величину, то пройти можно, так как конечную величину всегда можно исчерпать любой определенной величиной» [Аристотель. Физика, с. 206б]. Это совпадает с принципом отношений Евдокса. Числа и величины до XIX века были различными понятиями.

Философы Средних веков обогатили анализ непрерывного и дискретного развитием логики, углублением понятий континуума, бесконечности, введением логических квантификаторов. Назовём Фому Аквинского (1225/6–1274), Дунса Скотта (1265/6–1308), Уильяма Оккама (1281–1348/9), Томаса Брадвардина (1290–1349), Жана Буридана (1300–1358).

Лейбниц сначала находился на позициях Декарта в том, что пространство и время состоят из точек и моментов типа «здесь» и «теперь». Но после 1676 года он пришёл к иной концепции: «До обозначения нет никаких точек... Нет точек, линий, поверхностей, т. е. вообще оконечностей, кроме тех, которые возникают при делении: и в непрерывности нет частей, пока они не созданы делением. Но никогда не осуществляются все деления, какие только осуществимы...» [2, т. 3, с. 250].

В 1692 году Лейбниц писал Фуше о необходимости признания принципа непрерывности Аристотеля: «Вы правы, говоря, что коль скоро все величины могут делиться до бесконечности, не существует такой величины, сколь угодно малой, которая в свою очередь не могла бы быть разделена на еще меньшие части, число которых бесконечно… Впрочем, я не нахожу ничего дурного и в предположении, что эта делимость может быть в конце концов исчерпана, хотя и не вижу в этом никакой нужды» [2, т. 3, с. 287].

Рис. 2. Готфрид Вильгельм Лейбниц

Лейбниц рассматривал континуальность применительно к пространству и времени. Полемизируя с Галилеем, он пишет в 1676 году: «Я думаю так: нет такой части материи, которая не была бы актуально разделена на множество частей, и, следовательно, нет столь малого тела, в котором не содержался бы мир бесчисленных творений... Таким образом, и тело, и пространство, и время актуально подразделены до бесконечности» [2, т. 3, с. 256]. Точка зрения Лейбница на континуум изменялась, что отмечает А. П. Юшкевич: «Великий философ и математик высказывал в разное время различные мнения о сущности исчисления бесконечно малых. Иногда, например, он рассматривал дифференциал *dx* как конечный, но крайне малый отрезок, по крайней мере, пропорциональный конечному отрезку. Очень часто, особенно в более поздние годы жизни, он отзывался о бесконечно малых как об идеальных вещах и понятиях, как об удобных в эвристическом отношении фикциях, результаты применения которых можно, если угодно, получить с помощью строгого доказательства исчерпыванием. Наконец, у него имеется и та мысль, что бесконечно малые суть величины, меньше всякой конечной величины, хотя и не нулевые, величины “несравнимые” в том смысле, что на какую бы конечную величину их ни умножить, результат не будет конечной величиной» [3, с. 14–15].

Лейбниц называл проблему континуума «узлом, который никто не развязал: «Ни Аристотель, ни Галилей, ни Декарт не могли обойти этот узел: один его скрыл, другой оставил неразвязанным, третий разрубил» [2, т. 3, с. 246]. Пытаясь объяснить непрерывность движения, Лейбниц приходит к необходимости ввести чередование покоя и скачков: «Всё, что движется, меняет место, находится в два смежных момента в двух противоположных одно другому состояниях. Что изменяется непрерывно, у того за любым моментом пребывания в одном состоянии непосредственно следует момент пребывания в другом состоянии. В частности, если тело находится в непрерывном движении, то за каждым моментом его пребывания в одной точке пространства непосредственно следует момент пребывания в другой точке пространства. Эти две точки пространства или ничем не отделены одна от другой, или отделены. Если не отделены, то отсюда следует, что линия состоит из точек, так как этими переходами от одной точки к другой исчерпывается прохождение по всей линии. Но предположение, что линия состоит из точек, приводит к нелепости. Если же точки отделены одна от другой, то тело, переходя от одной к другой в один момент, или окажется находящимся одновременно в обеих точках и в промежутке между ними, то есть во многих местах, что нелепо; или перейдёт от одного конца промежутка к другому скачком, минуя самый промежуток, что также нелепо. Итак, тело не движется непрерывно, но состояния движения и покоя чередуются. Но промежутки, в которых тело движется, в свою очередь, должны содержать движение либо непрерывное, либо чередующееся с состоянием покоя, и так без конца. Следовательно, или мы где-нибудь встретим чистое непрерывное движение, которое, как мы уже показали, невозможно, или мы должны будем признать, что вообще не остаётся никакого движения, кроме моментального, а всё прочее – состояние покоя. Итак, мы снова пришли к моментальному движению, то есть к скачку, которого хотели избежать» [2, т. 3, с. 257–258].

Приведём также фрагмент из «Двух отрывков о принципе непрерывности»:

«Этот общий принцип вытекает из рассмотрения бесконечного и оказывается весьма полезным для мышления, хотя он и не применяется в достаточной степени и не вполне выяснен. Он безусловно необходим в геометрии, но его можно с успехом применять и в физике, так как высшая премудрость, являющаяся источником вещей, применяет совершеннейшую геометрию и соблюдает гармонию, красота которой несравненна. Итак, я часто пользуюсь при испытаниях и исследованиях этим принципом как своего рода пробирным камнем, благодаря которому тотчас и с первого взгляда можно выяснить ошибочность многих непоследовательных мнений, даже без детального исследования фактов. Этот принцип может быть сформулирован следующим образом: когда различие между двумя случаями, представляющимися в том, что дано или допускается, может уменьшаться таким образом, что оно становится меньше всякой величины, то необходимо, чтобы и различие между соответственными случаями, представляющимися в искомых или в выводах, вытекающих из того, что дано или допускается, уменьшалось таким образом, чтобы оно становилось меньше всякой величины. Или, выражаясь яснее: когда случаи (или данные) непрерывно приближаются друг к другу так, что, наконец, один переходит в другой, то необходимо, чтобы и в соответственных следствиях или выводах (или в искомых) происходило то же самое. Это вытекает из еще более общего принципа: когда данные следуют одно за другим в определенном порядке, то и искомые следуют одно за другим в определенном порядке. Но следует пояснить это правило легкими примерами, для того чтобы лучше выяснить, на чем основано его применение. Мы знаем, что конические сечения получаются благодаря проектированию окружности и что проекция прямой есть прямая. Если же прямая пересекает окружность в двух точках, то и проекция прямой пересечет проекцию окружности, например эллипс или гиперболу, в двух точках. Но секущая может двигаться таким образом, чтобы все более и более увеличивалась часть ее, расположенная вне круга, и чтобы точки пересечения все более и более приближались друг к другу, пока они наконец совпадут, причем в этом случае прямая начинает выходить из круга или становится касательной к окружности. Тогда, следовательно, и сами проекции точек пересечения прямой к окружности, т. е. точки пересечения проекции прямой с проекцией окружности, должны непрерывно приближаться друг к другу, и наконец, когда сами точки пересечения совпадают, совпадут и проекции этих точек. Следовательно, когда первая прямая становится касательной к окружности, то и прямая, являющаяся проекцией этой прямой, становится касательной к коническому сечению, представляющему собой проекцию окружности. Эта истина принадлежит к числу основных теорем, относящихся к коническим сечениям, и она доказывается не косвенным путем и не с помощью фигур, но вышеуказанным легким способом, путем непосредственной интуиции, и не для каждого из конических сечений в отдельности, как другие теоремы, а для всех конических сечений вообще. Приведем еще другой пример из теории конических сечений. Известно, что эллипс может до какой угодно степени приближаться к параболе, так что различие между эллипсом и параболой может стать менее любого данного различия, если только представить себе, что другой фокус эллипса удаляется от находящегося к нам ближе фокуса на достаточно большое расстояние, так что, следовательно, и радиусы, исходящие из этого более удаленного фокуса, как угодно мало отличаются от параллельных линий, так что, следовательно, в силу нашего принципа можно будет применить к параболе все без исключения геометрические теоремы, относящиеся к эллипсу, если только парабола рассматривается как эллипс, фокусы которого бесконечно удалены друг от друга, или (если представляется желательным избегать выражения «бесконечное») как фигура, отличие которой от эллипса может стать меньше всякой данной величины» [2, т. 1, с. 203–204].

Из письма к Вариньону: «Но если непрерывность есть необходимый постулат (requisitum) и отличительный признак истинных законов сообщения движения, то можно ли еще сомневаться в том, что все явления подчинены закону непрерывности, или в том, что они разумно могут быть объяснены только по истинным законам сообщения движения. Поскольку, как я считаю, этот закон создает совершенную непрерывность в плане последовательности, он создает нечто подобное и в плане одновременности, что дает нам заполненную реальность и позволяет относить пустые пространства к области вымысла. В явлениях, существующих одновременно, имеет место и последовательность, хотя воображение замечает одни только скачки: ведь большое число явлений кажется нам абсолютно несхожими и разъединенными, но, когда мы пристальнее присмотримся, мы найдем их внутренне совершенно схожими и едиными. Если мы видим лишь внешние контуры парабол, эллипсов и гипербол, то мы можем подумать, что между этими кривыми существует значительное отличие. А между тем мы знаем, что они внутренне связаны, так что невозможно найти между двумя из них какое-либо промежуточное пространство, которое позволило бы нам более неуловимым образом перейти от одного к другому» [2, т. 1, с. 211–214].

С. С. Демидов выделяет два аспекта принципа непрерывности у Лейбница: первый, заключённый в словах: «если упорядочены данные, то упорядочены и искомые. Говоря языком алгебры, если в одной формуле высшей характеристики выразить какое-либо одно существенное для универсума явление, то в такой формуле можно будет прочесть последующие, будущие явления во всех частях универсума и во все строго определённые времена» – отсюда происходит понимание непрерывности Эйлером. И второй аспект, заключённый в словах из письма к Вариньону: «когда различие между двумя случаями, представляющимися в том, что дано или допускается, может уменьшаться таким образом, что оно становится меньше всякой величины, то необходимо, чтобы и различие между соответственными случаями, представляющимися в искомых или в выводах, вытекающих из того, что дано или допускается, уменьшалось таким образом, чтобы оно становилось меньше всякой величины» – привёл к трактовке Больцано–Коши. Демидов указывает на связь принципа непрерывности Лейбница с понимание непрерывности Эйлером, и далее Больцано и Коши: «Нет оснований сомневаться в том, что это понимание и соответствующий термин также восходят к лейбницевскому «закону непрерывности», но уже к первой из приведённых выше его трактовок» [4, с. 37–38].

Литература к III главе

1. *Аристотель.* Собрание сочинений. – М.: Наука.

2. *Лейбниц Г. В.* Сочинения в 4-х т. / Г.В. Лейбниц. – М.: Наука, 1984.

3. *Юшкевич А. П.* Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке / А. П. Юшкевич // Л. Карно Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых. – М.: 1936.

4. *Демидов С. С.* «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера / С. С. Демидов //Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1990. – Вып. XXXII–XXXIII. – С. 34– 39.

5. *Гайденко П. П.* Понятие времени и проблема континуума / П. П. Гайденко. – 1999. – Электронный ресурс: http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000026/index.shtml.

Глава IV. ИСТОРИЯ ПРАВИЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

У Архимеда встречается указание на связь между параболами и их площадями. К его работам обращались Ферма, Кавальери, Торричелли. Правила дифференцирования формировались постепенно, начиная с XVII века. Ещё когда Ньютону было 15 лет, а Лейбницу 12, алгебраисты знали процедуру дифференцирования многочлена – Гудде, 1658 год, Ролль, 1690 год. Для нахождения вспомогательного алгебраического уравнения каждый элемент исходного умножался на показатель степени и делился на неизвестное, что для нас равносильно взятию производной.

В работах Ньютона функции представляются рядами с помощью интерполирования – в 1665 логарифм, в 1676 бином, затем синус, косинус, как обращение ряда арксинус и экспонента. У Ньютона $y = y(t)$ – функция времени, и её производные обозначались $\dot{y}, \ddot{y}$. Вот, например, как выводит Ньютон производную степенной функции (ок. 1691 г., опубл. в 1704 г.):

«*Величина x течёт равномерно. Требуется найти флюксию величины* x^n.

В то же время, когда величина x в своём течении обращается в $X+o$, величина x^n переходит в $\overline{x+o}^{\,n}$, то есть, согласно методу бесконечных рядов в $x^n +$ $nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\ldots$. Приращения o и $nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\ldots$ относятся между собой как 1 к $nx^{n-1}+\frac{nn-n}{2}ox^{n-2}+\ldots$

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет 1 к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n, как 1 к nx^{n-1}» [1, с. 169].

Лейбниц (1646–1716) ввёл символы $dx, dy, {}^{dx}\!/_{dy}, \frac{d^n y}{dx^n}$ и сформулировал правила дифференцирования суммы, произведения и частного в 1675 году. Он же сформулировал правило дифференцирования сложной функции $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ [2, с. 166–169].

Первый систематический свод правил дифференцирования был опубликован Эйлером в 1748 году во «Введении в анализ бесконечных» [3] и в 1755 году в «Дифференциальном исчислении» [4]. Он даёт правила исчисления конечных разностей первого и высших порядков степенной функции с любым показателем, далее – логарифма, синуса, косинуса, представленных рядами, даёт формулу для ряда обратных функций (без современной символики аркфункций, она была введена в 1770 году Клюгелем). Эйлер приводит правила дифференцирования произведения, частного, сложной функции. После этого Эйлер говорит: «правила дифференцирования, которые мы только что изложили, являются настолько общими, что нельзя придумать никакой алгебраической функции от x, которая не могла бы дифференцироваться с их помощью.

Каждая функция состоит из частей, связанных друг с другом сложением, вычитанием, умножением, или делением; эти части будут либо рациональными, либо иррациональными. Назовём эти количества, составляющие какую-либо функцию, её частями:

Тогда предложенная функция сперва будет дифференцироваться поочерёдно относительно каждой её части так, как если бы лишь одна эта часть была переменной, другие же все части – постоянными. После этого отдельные дифференциалы, полученные из отдельных частей описанным способом, нужно собрать в единую сумму, и таким образом получится дифференциал предложенной функции» [4, с. 127–128].

Правила дифференцирования трансцендентных, то есть неалгебраических функций (круговых дуг, логарифмов и показательных функций, а также арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса) Эйлер рассматривает отдельно с помощью разложения в ряд [4, с. 138]. Здесь же он вводит правило дифференцирования степенно-показательной функции.

Рассматривает Эйлер и правила дифференцирования функции двух аргументов $V = V(x, y)$: «Сперва будем считать переменным только количество x, другое же количество y будем рассматривать как постоянное и найдём дифференциал количества V, который пусть будет равен pdx. Затем будем считать переменным только количество y, другое же количество x – постоянным и будем искать дифференциал количества V, который пусть будет равен qdy. Тогда, считая оба количества x и y переменными, мы будем иметь $dV = pdx + qdy$». Далее Эйлер даёт правило для функции трёх и более переменных. Также он рассматривает вопрос о возможности восстановления функции нескольких переменных по её полному дифференциалу $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, называя это свойство изящным [4, с. 154–161]. Он демонстрирует независимость смешанных производных от порядка дифференцирования, приводит правила повторного дифференцирования, правило Лопиталя (без имени) [4, с. 489]. У Эйлера обозначение $D_x f(x)$ носит характер оператора.

Лагранж в 1770 году ввёл удобные обозначения производных y' в статье «Новый метод решения буквенных уравнений с помощью рядов» [5]. Раскладывая функцию в ряд, что он считал чисто алгебраической операцией, Лагранж выражал каждую очередную производную через предыдущую (dérivées) с помощью повторного дифференцирования. В 1772 году в работе «О новом роде исчисления, относящемся к дифференцированию и интегрированию переменных величин» [6] он рассматривает разложение функции $u = u(x + \xi)$ по степеням ξ: $u+u'\xi+\frac{u''}{2}\xi^2+\frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3+\ldots$ и последовательно определяет функции u, u', u'', u'''... начиная с u', как коэффициенты при первой степени предшествующего разложения по степеням ξ. Так все функции могут быть произведены (dérivées) из начальной u с помощью одного и того же алгебраического закона разложения в степенной ряд. Здесь же у него впервые встречается запись $u'={}^{du}\!/_{dx}$, $du=u'dx$. Лагранж использовал свою терминологию в «Теории аналитических функций» 1797 года [7], ввёл термин «примитивная».

С. Ф. Лакруа ввёл термин «дифференциальные коэффициенты».

В России термин «производная функции» впервые встречается у В. И. Висковатова (1779/80–1812).

Коши с 1821 года читал курс «Алгебраического анализа» в Политехнической школе, в 1823 году опубликовал «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении», в переводе В. Буняковского [8]. Коши рассматривает непрерывную функцию $y = f(x)$, при $\Delta x = i$ определяет производную как предел отношения бесконечно малых разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, обозначая её y' или $f'(x)$. Он определяет правила дифференцирования и приводит формулы производных для следующих функций: $a+x, a-x, ax, \frac{a}{x}, x^a, A^x, L(x)$, $\sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x$, где $L(x)$ – натуральный логарифм, а также формулы производных тангенса, котангенса, секанса, косеканса и обратных к ним. Приводит правила дифференцирования сложных и неявных функций как для функции одной, так и нескольких переменных, а также правила нахождения производных высших порядков.

В 1907 году Улисс Дини в «Лекциях по инфинитезимальному анализу» [9] вводит понятие производной традиционно, по Коши, формулу производной степенной функции выводит через бином, а формулы тригонометрических функций получает, используя классические пределы [9, с. 24–64].

Литература к IV главе

1. *Ньютон И.* Рассуждения о квадратуре кривых / И. Ньютон. Математические работы; пер. с латыни Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: Гостехиздат, 1937. – С. 167–194.

2. *Лейбниц Г.-В.* Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница (пер. и ред. А. П. Юшкевича) / Г.-В. Лейбниц // УМН. – 3 (23), 1948. – С. 165–204.

3. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных / Л. Эйлер. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 392 с.

4. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. – ГИТТЛ, 1949. – 580 с.

5. *Lagrange J. L.* Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries / J. L. Lagrange // Oeuvres, Vol. III. – P. 5–76.

6. *Lagrange J. L.* Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables / J. L. Lagrange // Nouveaux Memoires de l'Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin // Oeuvres, Vol. III. – P. 441–478.

7. *Lagrange J. L.* Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies // Oeuvres, Vol. IX. – P. 13–413.

8. *Коши О.* Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). / пер. Буняковского / О. Коши. – СПб., 1831. – 254 с.

9. *Dini U.* Lezioni di analisi infinitesimale, due voi / U. Dini. – Pisa: Succ. Nistri, 1907–1915. – 483 p.

Глава V. ОСОБЕННОСТИ ФРАНЦУЗСКОЙ И НЕМЕЦКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАДИЦИИ XIX ВЕКА. КОШИ О ЧИСЛЕ И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Логика Пор-Рояля

Во Франции, в 6 лье от Парижа с XII века существовал женский монастырь Пор-Рояль. Близость столицы сказывалась на составе обитательниц монастыря – среди воспитанниц и монахинь были члены аристократических семей, а некоторая свобода нравов позволяла родственникам и знакомым навещать обитательниц и жить подолгу в доме для гостей. В XV веке здесь скрывался от правосудия Франсуа Вийон. При монастыре была школа, в которой преподавали известные учёные. Эту школу закончил Жан Расин, написавший историю Пор-Рояля (*Abrégé de l'histoire de Port-Royal).* К XVII веку при монастыре образовался кружок отшельников – постоянно проживающих дворян, военных, учёных – богословов, философов, филологов, математиков. Как приверженцы янсенизма, они состояли в оппозиции к иезуитам, имевшим большое влияние во Франции. Среди отшельников были Блез Паскаль, Антуан Арно, Пьер Николь, Клод Лансло. Бывал в Пор-Рояле и Рене Декарт. В школе при монастыре обучали по собственным учебникам, написанным членами кружка и отпечатанным в монастырской типографии. В 1660 году вышла «Грамматика Пор-Рояля» Арно и Лансло, в 1662 году «Логика Пор-Рояля» Арно и Николя. Арно и Лансло впервые выделяют порождающую роль французского языка, общую для всех языков смысловую основу, разделяют объём понятий и структуру понятий, смысловую и логическую стороны утверждений. В качестве примеров рассматриваются представления о числе от Евклида до Стевина. Рассмотрены способы доказательств, приведены рассуждения о принципе предвосхищения основания. Постулируется неизменность понятия на протяжении всего рассуждения. «Логика Пор-Рояля» на два века стала методологической основой французских математиков. Ж. Адамар прямо высказывался о своей приверженности к логике Пор-Рояля. Н. Н. Лузин, анализируя противоречия математики конца XIX – начала XX века, указывал на влияние логики Пор-Рояля на Лебега, Бэра, Бореля и Пуанкаре.

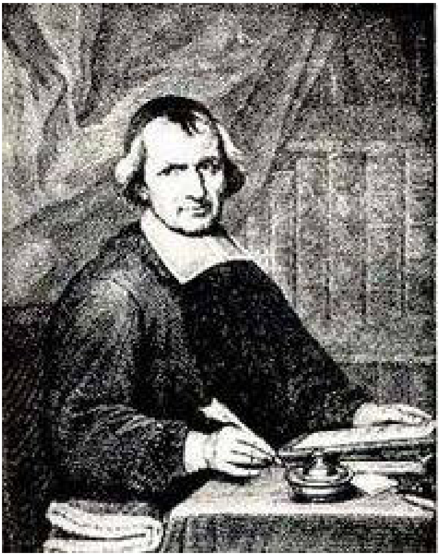


Рис. 1. Антуан Арно

Рис. 2. Пьер Николь

Это было время, когда научная и учебная литература начала издаваться на французском языке, в школе Пор-Рояля занятия велись по-французски, и сам французский язык преподавался по новой, фонетической методике. Латынь, как единственно возможный язык науки, постепенно уступает свои позиции. Филологи Пор-Рояля – Клод Лансло и Антуан Арно в своей «Грамматике» обсуждают вопрос об общей логической основе всех языков, соответствующих структуре мысли, о степени точности передачи смысла при переводе с одного языка на другой. Авторы стремились выявить фундаментальные структуры человеческого сознания. В «Логике» эта проблема рассматривается применительно к понятиям в науке вообще и математике в частности. В текст включены критически переработанные рассуждения Декарта и Паскаля. Паскаль был в большей степени реалистом, нежели Декарт, он утверждал независимость науки от философии. В «Логике» искусство думать предполагало освобождение от вербальных форм, стремление к изначальному смыслу. Впервые различались определение идеи (definition nominis) и определение реальной вещи (definition rei). Этот метод должен был стать не только методом обоснования, но и методом открытия. Авторы упрекали математиков в недостаточной строгости, в использовании принципа предвосхищения основания (petitio principii). В разделе «Пятый недостаток – не думать о естественном порядке» Арно и Николь пишут: «Это самый большой недостаток геометров[16]. Они решили, что им не надо соблюдать никакого другого порядка, кроме того, чтобы первые положения служили для доказательства предыдущих. И таким образом, не заботясь о правилах истинного метода, состоящего в том, чтобы всегда начинать с самого простого и самого общего и затем переходить к более сложному и более частному, они вперемешку говорят о линиях и площадях, треугольниках и квадратах, доказывают через посредство фигур свойства простых линий и допускают множество других нарушений [естественного порядка], искажающих эту прекрасную науку. В «Началах» Евклида этот недостаток встречается повсюду» [1, с. 337–338].

В процессе рассуждения утверждался принцип сохранности объёма и структуры понятия. Например, если в рассуждении используется понятие «чётное число», что означает число, которое делится на 2, то в любой момент рассуждения мы тождественно можем вместо слов «чётное число» подставить слова «число, которое делится на 2».

---

[16] Геометрами называли всех математиков.

Вновь к этим вопросам математики обратились в XIX веке, когда в математике возникла проблема строгости. Французские математики сохранили традицию логики Пор-Рояля. Дискуссия о строгости и определённости в математике хорошо изложена в книге М. Клайна [2].

К концу XVIII века Франция была сильным государством с ведущей научной ролью в математике. Но закрытие и последующая реформа Академии наук и образования изменили научное направление на более прагматическое и милитаризованное. Наука переместилась из университетов в военные школы, усилились требования к строгости и отчётливости преподавания, его ориентации на практическую пользу.

Огюстен Коши преподавал математику в Политехнической школе инженерам, его задачей было кратко и системно изложить курс математического анализа. В отличие от математиков Франции, немецкие математики XIX века не были связаны необходимостью готовить гражданских и военных инженеров в масштабах большого государства (Германия воссоединилась только в 1871 году). Преподавание в немецких университетах было направлено на подготовку педагогов. Бытие немецких учёных было неспешно-провинциальным, их исследования носили более общий характер, нежели французские. Ярким примером тому является Георг Кантор. Его теория позволила математике приобрести свободу фундаментальной науки, освободила её от зависимости по отношению к прикладным наукам. Прежде все понятия математики имели непременную связь с геометрией, физикой, механикой. Теория Кантора дала возможность формировать новые понятия, обусловленные внутренней логикой математики, её языка. Изменился тип определений, они стали в большей степени описательными, что вызвало к жизни новый тип математической теории – дескриптивную теорию множеств. К концу XIX века, зародившись как результат исследования математиками Франции Бэром, Борелем, Лебегом, Адамаром, Пуанкаре и другими теории множеств Кантора и её противоречий, она была продолжена в работах математиков московской школы – Егорова, Лузина и их учеников.

Число и непрерывность у О. Л. Коши. Теоремы о непрерывных функциях

Математический анализ как учебный курс начал складываться ещё у Лопиталя, но строгой систематической формы он достиг в курсе анализа Огюстена Коши.

В 1821 году Коши прочитал «Курс анализа» [3, 4] в Политехнической школе, а в 1823 году «Лекции по инфинитезимальному исчислению» [5, 6], Благодаря этим курсам сложилась структура математического анализа как научной и учебной дисциплины. Заметим, что читал Коши будущим инженерам, то есть курс его был ориентирован на практические приложения.

Коши начинал с понятия числа, переменной величины, функции, предела, непрерывной функции. Число в 1823 году [6, с. 1] он определял так: «Выражение *число* мы будем употреблять в том смысле, в каком оно принимается в арифметике, где мы производим его от абсолютного измерения величин. Название же *количество* будет присваиваемо только *вещественным положительным* или *отрицательным* количествами, т. е. также числам, но имеющим пред собою знак + или –. Кроме того, мы будем рассматривать количества, как средства для выражения увеличений или уменьшений» [6, с. 2].

Предел определялся так: «Если последовательные значения одной и той же переменной неопределённо приближаются к некоторой постоянной величине, так что разность между ними и этой постоянной величиной может сделаться менее всякой данной величины, то постоянная величина называется *пределом* переменной. Так, например, иррациональное число есть предел различных дробей, которых значение более и более приближается к нему. Если последовательные численные значения переменной, неопределённо убывая, делаются наконец менее всякого данного числа, то переменная обращается в так называемую *бесконечно малую величину*. Переменная такого рода имеет пределом нуль» [6, с. 3].

В первой главе о вещественных функциях определение функции вводилось так: «Если переменные величины таким образом связаны между собою, что, по данному значению одной из них можно определить значения остальных, то обыкновенно эти различные величины выражаются посредством одной из них, которая в таком случае принимает название *переменной независимой*; остальные же величины, выраженные посредством переменной независимой, называются функциями этой переменной»[6, с. 18].

Иррациональное число Коши понимал как предел последовательности, удовлетворяющей критерию сходимости[17], но Коши не определяет

---

[17] Этот критерий носит имя Коши, но был сформулирован Больцано в 1817 году.

действия над иррациональными числами и их упорядочение. Он лишь определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень.

Теоремы о непрерывных функциях выделяются в особый класс теорем в курсе анализа Коши. В 1797 году Лагранж доказал теорему о среднем значении, в 1806 году Ампер, пожалуй, впервые, назвал её именем Лагранжа. Теорема о корневом интервале ведёт свою историю от Мишеля Ролля, но значение её впервые оценивает Б. Больцано, есть она и в курсе Коши.

О. Л. Коши. Теоремы о непрерывных функциях

«Между многими понятиями, тесно связанными со свойствами бесконечно малых, следует поместить понятия о непрерывности и прерывности функций; с этой целью сначала рассмотрим функции одной переменной. Пусть $f(x)$ функция переменной x; положим, что для каждого значения x, заключающегося между двумя данными пределами, функция эта допускает постоянное конечное и притом единственное значение. Если выбрав для x значение, содержащееся между этими пределами, дадим переменной x бесконечно малое приращение α, тогда и самая функция получит приращение, выражающееся разностью $f(x + \alpha) - f(x)$; эта разность зависит уже и от новой переменной α и от значений x. При таком условии $f(x)$, между двумя означенными пределами для переменной x, будет непрерывной функцией этой переменной, когда при каждом значении x, заключающемся в этих пределах, численная величина разности $f(x + \alpha) - f(x)$ неопределённо убывает вместе с α. Скажем иначе: $f(x)$ тогда останется непрерывной относительно x между данными пределами, когда между этими же пределами бесконечно малое приращение переменной производит бесконечно малое приращение самой функции.

Говорят также, что $f(x)$, в сопредельности частного значения переменной x, будет непрерывной функцией этой переменной во всех тех случаях, когда она непрерывна между двумя даже весьма близкими пределами x, заключающими это частное значение.

Наконец, когда $f(x)$ перестаёт быть непрерывной в сопредельности частного значения переменной x, то говорят, что она делается *прерывною*, и что для этого частного значения происходит *разрыв непрерывности*.

После этих объяснений легко узнать, между какими пределами данная функция переменной x непрерывна относительно этой переменной» [6, с. 32].

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна относительно переменной x между пределами $x = x_0$, $x = X$ и если означим через b количество, среднее между $f(x_0)$ и $f(X)$, то всегда можно удовлетворить уравнению $f(x) = b$ одним или несколькими вещественными значениями x, заключающимися между x_0 и X.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, достаточно доказать, что кривая, которой уравнение есть $y = f(x)$, встречает один или несколько раз прямую, которой уравнение есть $y = b$, в промежутке между ординатами, соответствующими абсциссам x_0 и X, что очевидно будет иметь место при допущенном условии. И действительно, так как $f(x)$ остаётся непрерывной между пределами $x = x_0$, $x = X$, кривая, определяемая уравнением $y = f(x)$, проходя 1^0 через точку, имеющую координатами x_0, $f(x_0)$ и 2^0 через другую точку, которой координаты X, $f(X)$, должна быть непрерывною между этими точками.

Но постоянная ордината b прямой, выражаемой уравнением $y = b$, находится между ординатами $f(x_0)$, $f(X)$ двух рассматриваемых точек; поэтому прямая необходимо пройдёт между этими точками и следовательно непременно встретит означенную кривую.

Впрочем, можно доказать означенную 4-ю теорему как это сделано в IV прибавлении, прямым аналитическим путём и с тою даже выгодою, что этот путь доставляет также численное решение уравнения $f(x) = b$» [6, с. 41].

Коши формулирует теорему о корневом интервале: «Если непрерывная функция имеет разные знаки между двумя пределами, то между этими пределами найдётся точка, в которой функция равна нулю» [3, с. 378].

§ 1. *Определение непрерывной функции, составленной таким образом, что две подобные функции переменных количеств, будучи сложены или перемножены между собою, дают в сумме или в произведении подобную же функцию суммы или произведения тех же переменных.*<…> [6, с. 98].

Прибавление III. О численном решении уравнений.

1 *Теорема. Пусть $f(x)$ будет вещественная функция переменной x, непрерывная между пределами $x = x_0$, $x = X$. Если $f(x_0)$ и $f(X)$ имеют*

противные знаки, то уравнение (1.) $f(x) = 0$ *может быть удовлетворено одним или несколькими вещественными значениями* x, *взятыми между* x_0 *и* X.

Доказательство. Пусть x_0 будет меньшее из двух количеств x_0 и X, положим $X - x_0 = h$ и означим через m какое-нибудь целое число, большее единицы. Так как из двух количеств, $f(x_0)$ и $f(X)$, одно положительное, а другое отрицательное, то образуя ряд $f(x_0), f\left(x_0+\frac{h}{m}\right), f\left(x_0+2\frac{h}{m}\right), \ldots, f\left(x_0-\frac{h}{m}\right), f(X)$ и сравнивая в нем первый член со вторым, второй с третьим, третий с четвёртым и т. д., необходимо найдём наконец одну или несколько пар последовательных членов с противными знаками. Пусть $f(x_1)$ и $f(X')$ два таких члена, где при том x_1 меньшая из обеих соответствующих величин x. Очевидно, что $x_0 < x_1 < X' < X$ и $X' - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0)$. Определив x_1 и X', можно подобным образом между этими двумя новыми значениями x вставить два таких других, x_2 и X'', которые, будучи подставлены в $f(x)$, дадут результаты с разными знаками и будут удовлетворять условиям $x_1 < x_2 < X'' < X'$, $X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0)$. Продолжая таким образом, получим во-первых, ряд возрастающих значений x, именно x_0, $x_1, x_2, \ldots$ (2.) и т. д., во-вторых ряд убывающих величин (3.) $X, X', X'', \ldots$ и т. д., которые, превосходя первые количества равными произведениям $1 \times (X - x_0), \frac{1}{m} \times (X - x_0), \frac{1}{m^2} \times (X - x_0),$ и т. д., будут наконец произвольно мало отличаться от них. Отсюда должно заключить, что общие члены рядов (2.) и (3.) будут стремиться к одному общему пределу. Пусть a будет этот предел. Так как $f(x)$ остаётся непрерывною в пределах $x = x_0$, $x = X$, то общие члены рядов $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ и т. д., $f(X)$, $f(X'), f(X''), \ldots$ и т. д. будут равным образом стремиться к общему пределу $f(a)$; и так как, приближаясь к этому пределу, они всегда останутся с противоположными знаками, то ясно, что количество $f(a)$, необходимо конечное, не будет отличаться от нуля. Следовательно, мы можем удовлетворить уравнению (1.) $f(x) = 0$, дав переменной x частное значение a, заключающееся между x_0 и X. Другими словами, (4.) $x = a$ будет корень уравнения (1.). (Примечание – о погрешности, о нескольких корнях, о единственности корня в случае монотонности).

Следствие 1. Если уравнение (1.) не имеет вещественных корней, в пределах x_0 и X, то оба количества $f(x_0)$ и $f(X)$ будут одного знака» [6, с. 437].

Обратим внимание на значительное сходство доказательства Коши с методом дихотомии Больцано.

Заметим также, что предел Коши понимает как ограничитель, то есть крайнюю точку отрезка, на котором рассматривает функцию.

Других теорем о непрерывных функций у Коши нет. В Курсе 1821 года Коши, введя понятие переменной, функции одной и нескольких переменных, предела и непрерывности, сразу переходит к рядам. Курс 1823 года уже содержит дифференциальное исчисление, в том числе и впервые теорему Коши о среднем значении [5, с. 105].

Литература к V главе

1. *Арно А., Николь П.* Логика, или искусство мыслить / А. Арно, П. Николь. – М.: Наука, 1991. – 417 с.
2. *Клайн М.* Математика. Утрата определённости / М. Клайн. – М., 1984 – 446 с.
3. *Cauchy, A.-L.* Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. Ser. 2, T. 3. 1–471.
4. *Коши О. Л.* Алгебрический анализ / О. Л. Коши. Пер. с франц. Ф. Эвальдом, В. Григорьевым, А. Ильиным. – Лейпциг, 1864. – 252 с.
5. *Cauchy A.-L.* Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal / A.-L. Cauchy, 1823. – Oeuvres, Ser. 2, T. 4, 9–261.
6. *Коши О.* Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823) / пер. В. Я. Буняковского / О. Коши. – СПб., 1831. – 254 с.

Глава VI. История языка «ε–δ». Теорема Лагранжа

«Читая Коши, так и хочется понимать его с позиций Вейерштрасса, но это антиисторический подход. Хотя переходный период до Вейерштрасса тоже нуждается в реконструкции.»

А. Граттан-Гиннесс [34, с. 176]

«Первый этап любого историко-математического исследования состоит в «переводе» изучаемого текста на язык современной науки. После уяснения математического содержания текста наступает второй, более трудный этап работы. Необходимо вложить изучаемое произведение в контекст науки его времени. Нужно выяснить, каковы были исследования предшествующих авторов, какие проблемы стояли перед наукой того времени, кто и как продолжил изыскания, содержащиеся в тексте, как понимались те или иные понятия. После первой, чисто математической интерпретации текста, встаёт более сложный вопрос о его историко-математической интерпретации, о месте изучаемого текста в той модели развития математики, которую мы строим для данной эпохи».

И. Г. Башмакова [2, с.191]

Понятие непрерывности с раннего античного времени имело много аспектов – пространственно-временной, физический, геометрический. С расширением круга задач и с развитием представления о функции физического и геометрического понимания непрерывности становилось недостаточно, требовалась арифметизация этого понятия.

Принцип непрерывности

В XVII веке Г. Лейбниц сформулировал «Закон непрерывности»: «Если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми)[18]» [5, с. 35].

Валлис в «Арифметике бесконечного» ввёл определение: «предел переменной величины – это величина постоянная, к которой переменная приближается так, что разность между ними может быть сделана менее любой данной величины». Экземпляр этой книги Валлиса, принадлежавший Эйлеру, сейчас находится в фонде Эйлера[19] в архиве Академии наук в Санкт-Петербурге.

Эйлер считал непрерывными функции, изображаемые одной формулой (для него функция $y = {}^{1}\!/_{x}$ непрерывна в своей области определения, а функция $y = |x|$ разрывна, потому что определяется двумя формулами). По Эйлеру «правила исчисления опираются на закон непрерывности, согласно которому кривые линии описываются непрерывным движением точки», «непрерывная линия строится так, что её природа выражается с помощью одной определённой функции от x» [29, с. 21]. Знаменитой стала эйлерова формулировка непрерывности: «Нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

В 1765 г. Ж. Даламбер даёт следующее определение предела: «Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой её не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между такой величиной и её пределом абсолютно неопределима» [12, с. 155–156].

Усилению интереса к инфинитезимальным вопросам способствовал конкурс, объявленный по инициативе Ж. Лагранжа Берлинской академией наук в 1786 году: «... требуется *ясная и точная теория того, что в математике называют бесконечным»* [14, с. 140]. 23 сочинения, присланные на конкурс, не удовлетворили Академию: «…требуемый принцип не должен ограничиваться исчислением бесконечно малых, но распространяться также на алгебру и на геометрию, трактующую на манер древних» [14, с. 141]. Лауреатом стал швейцарский математик, проживавший в те годы в Варшаве, Симон Люилье (1750–1840). В его работе «Элементарное изложение принципов высших исчислений», изданной

---

[18] Подробно этот вопрос изложен в [5]. Благодарю С. С. Демидова, обратившему внимание на близость этой идеи Лейбница и понимание непрерывности Больцано и Коши.

[19] Архив АН. Ф. 136. Д. 137. Оп. 1.

Академией в 1786 году, впервые появляется символ $\lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$ [37, с. 31]. Потом этот символ стал использовать Лакруа[20].

Лагранж был разочарован инфинитезимальными методами и в последующие годы избегал использования бесконечно малых.

Самым востребованным методом геометров XVIII века была аппроксимация. Например, «решая уравнение типа $(x+1)^{\mu}=a$ при нецелом μ, мы не можем найти точное решение, но аппроксимируем его бесконечным рядом. Определив конечное число элементов аппроксимирующего ряда, геометры XVIII века старались вычислить верхнюю границу ошибки аппроксимации (error, ε) – разность между суммой ряда и её n-й частичной суммой. Доказательной техникой здесь служила алгебра неравенств» [32, с. 4 файла эл. версии]. Математики работали с целыми функциями – рядами по целым степеням. Неявно предполагалось, что любая функция представима рядом сколь угодно точно. Теорема Вейерштрасса о приближении функции многочленом была сформулирована гораздо позже, в 1885 году. К операциям, производимым над функциями, относились как к алгебраическим.

Первые десятилетия XIX века можно охарактеризовать как период «наивной» теории функций – математический анализ развивался на базе элементарных функций, непрерывных и дифференцируемых, на основе интуитивных, качественных определений предела, окрестности, непрерывности и сходимости.

Ж. Л. Лагранж

В 1797 году Лагранж публикует «Теорию аналитических функций, содержащую начала дифференциального исчисления, освобождённые от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих пределов и флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных величин». Рассматривая функцию $f(x)$ и подставляя вместо x новую

---

[20] Сильвестр Лакруа (1765–1843) был последователем Лагранжа в Политехнической школе и профессором анализа у Коши. В 1850-х годах Вейерштрасс стал использовать обозначение $\lim\limits_{x=c}$; в 1905 году английский математик Джон Лезем впервые использует $\lim\limits_{x\to c}$ в книге [42].

величину $x + i$, Лагранж утверждает, что $f(x + i)$ может быть разложена в ряд по положительным степеням i, а коэффициенты при них находятся дифференцированием, что справедливо для известных функций. Рассматривая первый член разложения, Лагранж получает $f(x + i) = fx + P$, откуда $P = \frac{f(x+i)-fx}{i}$. При этом i может быть настолько малым, чтобы любой член разложения был более суммы всех следующих членов разложения, и это имеет место также для всех меньших значений i [12, с. 160–168]. Лагранж добавляет: «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды, зависит не только от сходимости рядов, но ещё от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что все приближённые методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, ещё очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять» [41, с. 67–68][21].

В 1800 году появляется работа К. Ф. Гаусса «Основные понятия учения о рядах» (см. [31]), где он рассматривает ряды как последовательности частичных сумм.

А.-М. Ампер

В 1806 году вышла статья Анри Ампера «Исследование некоторых вопросов дифференциального исчисления, позволяющих получить новое представление ряда Тейлора и его выражение в конечном виде, если ограничить суммирование» [19], имеющая непосредственное отношение к нашей истории. Здесь на 33 страницах Ампер доказывает теорему Лагранжа о среднем значении и на её основании получает то, что мы называем рядом Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа. А. П. Юшкевич называет эту работу Ампера попыткой аналитически доказать дифференцируемость непрерывной функции [8, с. 243].

Основным инструментом доказательств у Ампера были неравенства[22], с их помощью он оценивал приближения, характеризовал погрешность

---

[21] Цитируется по [8, с. 298], перевод А. П. Юшкевича.

[22] В работах Ж. Лагранжа, Ж.-Б. Фурье (1822 г.), П. А. Рахманова (1803 г.) используется этот же метод.

интерполяции. Следуя Лагранжу, Ампер рассматривает $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ как функцию двух переменных x и i, выражающую разностное отношение двух значений x и $x + i$ одной переменной, причём эта разность не равна ни нулю, ни бесконечности ни при каком x, а при $i = 0$ превращается в $\frac{0}{0}$, но не равна ни нулю, ни бесконечности. Эту функцию Лагранж назвал *следующей из производной*.

Рис. 1. Андре-Мари Ампер

Заметим, что символ i здесь означает действительное число, мнимую единицу тогда обозначали символом $\sqrt{-1}$. Ампер оговаривает, что будет рассматривать только функции действительной переменной. Разумеется, в рассмотрение по умолчанию включались только «хорошие» функции – непрерывные и дифференцируемые на конечном интервале[23]. Ампер замечает, что эта функция должна уменьшаться или увеличиваться

---

[23] Сам Ампер в своём мемуаре нигде не употреблял термины точка, интервал, наклон, хорда, касательная, и не делал рисунков.

с изменением i. Переменная x изменяется от $x = a$ до $x = k$, соответствующие значения функции $f(x)$ обозначаются через A и K. Ампер делит интервал от $x = a$ до $x = k$ промежуточными величинами b, c, d, e, которым отвечают значения функции B, C, D, E . Затем он строит разностные отношения вида $\frac{K-E}{k-e}$ и $\frac{E-A}{e-a}$ и доказывает справедливость неравенств вида

$$\frac{E-A}{e-a} < \frac{K-A}{k-a} < \frac{K-E}{k-e}.$$

Далее между старыми значениями вводятся новые и записываются новые неравенства, в результате для некоторого x происходит постепенное приближение $f'(x)$ к величине $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Отсюда получается, что эта величина всегда расположена между двумя значениями производной, вычисленными между x и $x + i$.

Пусть $x + i = z$ и $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = p$.

Тогда $f(z) = f(x) + p \cdot (z-x)$.

Продолжая процедуру, Ампер получает

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + p'(z-x)^2,$$

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \frac{f''(x)}{2}(z-x)^2 + \frac{p''}{2}(z-x)^3,$$

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \frac{f''(x)}{2}(z-x)^2 + \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}(z-x)^3 + \frac{p'''}{2\cdot 3}(z-x)^4,$$

и так далее.

Ампер приводит примеры разложения некоторых элементарных функций. Далее, рассматривая $f(x)$ как примитивную (первообразную) по отношению к $f'(x)$, он получает связь знака производной с возрастанием или убыванием функции [19]. Доказательство Ампера выглядит громоздким и неуклюжим. Именно это несовершенство и вызвало у Огюстена Луи Коши (1789−1857) желание дать лаконичное и красивое построение, что, как мы увидим далее, послужило источником создания языка «ε−δ».

Коши

Рис. 2. Огюстен Коши

С 1813 года Коши преподавал в Политехнической школе, в 1816 стал академиком. В 1821 году был опубликован его «Курс анализа» (Алгебраический анализ) [26] (перевод на русский язык – [9]), прочитанный в Королевской Политехнической школе, в котором Коши определяет понятие непрерывной функции: «Функция $f(x)$, данная между двумя известными пределами переменной x, является непрерывной функцией этой переменной, если для всех значений переменной x, взятой между этими пределами, численное значение разности $f(x + \alpha) - f(x)$ бесконечно уменьшается вместе с α. Иными словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной для x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной всегда влечёт бесконечно малое приращение самой функции. Добавим также, что функция $f(x)$, непрерывная для x, будет непрерывна и для соседних (voisinage) значений переменной x, лежащих между этими же пределами, как бы близко к этим пределам ни находился x » [26, с. 43][24]. Здесь он понимает предел как крайнюю точку рассматриваемого интервала.

В дальнейшем при всех обращениях к непрерывной функции Коши повторял и использовал только это определение. Английский историк математики Дж. Грей замечает: «Хотя пределы действительно появились в определениях Коши, но только в смысле конечной точки области определения» [35, с. 62]. Грей выделяет лишь один из двух аспектов понимания предела у Коши – как границы интервала (инселимитный предел), оставляя без внимания исследования Коши неопределённостей в предельной точке (интралимитный предел), например, предел отношения синуса к дуге.

В § 3 первой главы «Курса анализа» Коши рассматривает особые значения функции и доказывает теорему, которая будет ему нужна для рассмотрения эквивалентности бесконечно малых [9, с. 46][25]:

«Если с возрастанием переменной x разность $f(x + 1) - f(x)$ стремится к известному пределу k, то и дробь $\frac{f(x)}{x}$ в то же время стремится к тому же пределу.

Доказательство. Предположим, что количество k имеет конечное значение и что ε есть произвольно малое число. По условию, с возрастанием x разность $f(x + 1) - f(x)$ стремится к пределу k; кроме того, всегда можно взять столь большое число h, что при x, равном или большем h, эта разность постоянно будет между пределами $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$. Приняв это, означим через n какое-нибудь целое число, тогда каждое из количеств примет вид: $f(h+1) - f(h), f(h-2) - f(h+1), \ldots, f(h+n) - f(h+n-1)$, а потому их средняя арифметическая, т. е. $\frac{f(h+n) - f(h)}{n}$, будет заключаться между пределами $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$. Поэтому $\frac{f(h+n) - f(h)}{n} = k + \alpha$, где α – количество между пределами $-\varepsilon$, $+\varepsilon$.

Пусть теперь $h + n = x$, тогда предыдущее уравнение обратится в

$$\frac{f(x) - f(h)}{x - h} = k + \alpha \ , \tag{1}$$

---

[24] Перевод Г. Синкевич.

[25] Перевод Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина.

отсюда $f(x) = f(h) + (x - h) \cdot (k + \alpha)$ и

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right) \cdot (k + \alpha). \qquad (2)$$

Чтобы значение x могло возрастать неопределённо, достаточно неопределённо увеличивать число n, не изменяя значение h. Поэтому положим h постоянным в уравнении (2), а x примем за переменную, стремящуюся к пределу ∞; тогда количества $\frac{f(h)}{x}$, $\frac{h}{x}$, содержащиеся во второй части, будут стремиться к пределу нуль, и вся вторая часть к пределу вида $k + \alpha$, где α постоянно заключается между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$. Поэтому отношение $\frac{f(x)}{x}$ будет иметь пределом количество, заключающееся между $k - \varepsilon$ и $k + \varepsilon$.

Так как это заключение справедливо как бы мало ни было ε, то искомым пределом функции будет количество k. Другими словами

$$\lim \frac{f(x)}{x} = k = \lim[f(x+1) - f(x)].$$

Аналогично рассматривается случай стремления x к $\pm\infty$ [9, с. 46–49].

Как видно, здесь уже имеется структура, развитие которой привело к появлению метода «ε–δ». Но ε является здесь конечной, хотя и произвольно малой оценкой погрешности. Коши улучшает построение Ампера. Спустя два года он усовершенствует аргументацию из этого доказательства. Но необходимость читать курс традиционно, не отклоняясь на новшества, пока не позволяла Коши экспериментировать с введением новых методов. Судя по тому, что Коши приходилось рассказывать студентам основы (приведение к общему знаменателю, основания тригонометрии, свойства показательных функций), базовая подготовка слушателей была скромной. Известно, что студенты Коши шумно протестовали против изучения комплексных чисел – совершенно бесполезного, по их мнению, раздела математики.

В основном курсе Коши содержится изложение элементарных функции одной и нескольких переменных, функций действительной и мнимой (комплексную переменную тогда называли мнимой) переменной, их свойств, теория пределов со сравнением бесконечно малых, теория рядов, интерполяционные формулы Лагранжа.

В 1822 году вышла «Аналитическая теория тепла» Ж.-Б. Фурье, в которой он пользуется δ-приращениями [30, с.139].

В 1823 году опубликован «Конспект курса лекций по инфинитезимальному исчислению» [27], прочитанных Коши в Политехнической школе. Курс рассчитан на 40 лекций. На русском языке он вышел под названием «Дифференциальное и интегральное исчисление» в переводе В. Я. Буняковского в 1831 году [10]. В нём содержатся определение предела: «Ежели величины, приписываемые какому-либо переменному количеству, приближаются более и более к величине определённой так, что наконец различествуют от оной столь мало, сколь угодно, то сии последние величины называются пределом всех прочих» [10, с. 3] и определение непрерывной функции: «Ежели функция $f(x)$ изменяется с величиною x таким образом, что для каждого значения сей изменяемой величины, заключающейся в данных пределах, она имеет одну совершенно определённую величину, тогда разность $f(x + i) - f(x)$ между пределами величины x будет количество бесконечно малое; функция же $f(x)$, удовлетворяющая сему условию, называется между теми пределами непрерывною функцией изменяемой x» [10, с.11].

И далее во второй лекции:

«Если переменные величины связаны между собой так, что по значению одной данной величины можно получить значения остальных, под этим понимают, что эти различные величины выражены с помощью одной из них, называемой *независимой переменной,* а представимые через неё величины называют *функциями* от этой переменной.

Часто при вычислениях пользуются буквой Δ для обозначения одновременного увеличения двух переменных, зависящих одна от другой[26]. Тогда переменная y будет выражена как функция от переменной x равенством

---

[26] Этого замечания не было в курсе 1821 года. Здесь Коши указывает на наличие связи между приращением функции и приращением аргумента, но не конкретизирует зависимость в их изменении, как это сделал сорок лет спустя Вейерштрасс. Вместо этого следует типичный для XVIII и XIX века термин «одновременно» (simultané). Добавим, что метод исчерпывания соизмерялся с антропоморфным временем. Ньютон говорил, что может сосчитать площадь под параболой за половину четверти часа, у него же (см. [25, с. 103]): «в мгновение, когда истекает час, нет уже более какой-либо вписанной или описанной фигуры; но каждая из них совпадает с криволинейной фигурой, которая есть предел, которого они достигают». Другие математики XVIII века также определяли предельный процесс как занимающий некоторое количество часов, обозримый во времени. При этом символ ε обозначал погрешность вычисления, в том числе и у Коши.

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Тогда, если переменная y выражена как функция переменной x равенством $y = f(x)$, то Δy, или приращение y от приращения Δx переменной x, будет определено формулой

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

<…> Очевидно, (1) и (2) связаны, следовательно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (5)$$

Пусть теперь h и i – две различные величины, первая из них конечная, а вторая бесконечно малая, и пусть $\alpha = \frac{i}{h}$ – бесконечно малая величина, данная отношением этих двух величин. Если Δx соответствует конечная величина h, тогда величина Δy, заданная равенством (5), будет так называемой конечной разностью функции $f(x)$, и будет, естественно, конечным количеством.

Если же, наоборот, придать Δx бесконечно малое значение, например, $\Delta x = i = \alpha h$, значение Δy будет $f(x + i) - f(x)$ или $f(x + \alpha h) - f(x)$, и будет, естественно, бесконечно малым. В этом легко убедиться на примере функций $A^x, \sin x, \cos x$, которым соответствуют разности

$$A^{x+i} - A^x = \left(A^i - 1\right) \cdot A^x,$$

$$\sin(x+i) - \sin x = 2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x+i) - \cos x = -2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

каждая из которых имеет множитель $\left(A^i - 1\right)$ или $\sin\frac{i}{2}$, который вместе с i бесконечно приближается к пределу, равному нулю.

Таким образом, для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех x, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x + i) - f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т. е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется.

Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку [27, с.17][27].

В предположении, что любая непрерывная функция дифференцируема, Коши доказывает теорему о среднем значении (см. [27, с. 44–45]; [10, с. 36]):

«Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна между двумя пределами $x = x_0$, $x = X$. Обозначим через A наибольшее значение её производной, B – наименьшее значение её производной между теми же пределами. Тогда разностное отношение $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ необходимо будет заключаться между A и B.

Обозначим буквами δ, ε бесконечно малые числа, из которых первое пусть будет такого рода, что для численных величин i, меньших чем δ, и для какой-нибудь величины x, заключённой между пределами x_0, x, отношение $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ будет всегда больше, чем $f'(x) - \varepsilon$ и меньше, чем $f'(x) + \varepsilon$».[28]

Коши упоминает, что следует в этом доказательстве мемуару Ампера, который мы цитировали выше.

Подобно Амперу, Коши вставляет между x_0 и x новые значения[29] $x_1, x_2, \ldots, x_{n\text{-}1}$ так, чтобы разность $X - x_0$ была разложена на положительные части $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n\text{-}1}$, не превосходящие δ.

«Дроби

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}$, находясь между пределами: первая: $f'(x_0)-\varepsilon, f'(x_0)+\varepsilon$, вторая: $f'(x_1)-\varepsilon, f'(x_1)+\varepsilon$, будут более A – ε, но менее чем B + ε. Так как дроби имеют знаменатели одного знака, то разделив сумму их числителей на сумму их знаменателей, получим среднюю дробь, то есть такую, значение которой лежит между меньшей и большей из дробей. Но так как $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ является средней

---

[27] Перевод Г. Синкевич.

[28] Перевод В. Я. Буняковского.

[29] Как и Ампер, Коши не использует никаких геометрических образов – ни точек, ни отрезков.

дробью, следовательно, оно заключается между пределами $A - \varepsilon$ и $B + \varepsilon$. И так как это справедливо при сколь угодно малом ε, то, следовательно, $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ лежит между пределами A и B» [9, с. 36] и [27, с. 44][30]. Иными словами, Коши гениально упростил доказательство Ампера, введя более простые обозначения. У Ампера доказательство занимает половину из 33 страниц, у Коши – две страницы. Ампер вводит восемь вспомогательных величин и для каждой строит оценку отношения, вместо усреднения он доказывает громоздкие неравенства. У Коши доказательство изящно и лаконично.

Но Коши не анализирует зависимости ε и δ друг от друга и зависимости δ от очередной разности между соседними значениями переменной. Практически δ входит декларативно, вне всякой связи с остальным построением.

Американская исследовательница Джудит Грабинер считает [32], что Коши трансформировал доказательную технику алгебры неравенств в строгий инструмент оценки погрешности аппроксимации.

Голландский исследователь Т. Кётсиер полагает [38], что Коши пришёл к своей концепции непрерывности, анализируя своё доказательство теоремы о среднем, возможно, только в случае многочленов. Очевидно, что x_n у него – это переменные величины, отличающиеся от бесконечно малой на постоянную величину a. По определению непрерывности Коши, $f(x_n)$ должны отличаться от $f(a)$ на бесконечно малую величину. В отличие от точки зрения Грабинер, Кётсиер, анализируя доказательство Коши, не обнаруживает никаких следов ε – δ.

Анализируя предположение Грабинер о том, что Коши лишь оценивал погрешность приближения, П. Блащик (Польша), М. Кац (Израиль) и Д. Шерри (США) приходят к выводу: «Это были в большей степени затруднения инфинитезимального анализа, нежели затруднения эпсилонтики.После построения нижней и верхней оценок Коши заключает, что последние значения отличаются от первоначальных сколь угодно мало. Здесь слышатся слабые отзвуки ε – δ. Между тем Лейбниц использовал язык, близкий Коши: «Когда говорят, что какие-то бесконечные ряды имеют сумму, я понимаю это как то, что любые конечные ряды с тем же правилом имеют сумму, и что ошибка уменьшается с убыванием ряда, и становится произвольно малой». Коши пользовался

---

[30] Перевод В. Я. Буняковского.

эпсилонтикой? – в таком случае за сто лет до него ею пользовался Лейбниц» [21, с.18].

Как пишет А. В. Дорофеева о теореме о среднем у Коши, «это заключение верно только если можно подобрать одно и то же δ для всех x, а этот факт нуждается в доказательстве» [6, с. 48].

В 1985 году в Париже вышла книга Бруно Белоста[31] «Коши. 1789–1857» [20]. В 1997 году опубликован её перевод [3] на русский язык. Вот что написано в [3, с. 90] по поводу доказательства Коши этой теоремы Лагранжа: «Вместо формулы

$$f(x+i)-f(x)=pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

которая позволяла Лакруа представить приращение разложимой в ряд функции и определить дифференциал, Коши доказал теорему о конечных приращениях: если функция f непрерывно дифференцируема между x и $x+i$, то существует действительное положительное число $\theta < 1$, такое, что $f(x+i)-f(x)=i\cdot f'(x+\theta i)$.

Он вывел эту формулу, применяя теорему о промежуточных величинах, изложенную в «Алгебраическом анализе», из неравенства

$$\inf_{x\in[x_0,X]} f'(x)\le \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}\le \sup_{x\in[x_0,X]} f'(x), \qquad (*)$$

которое верно для любой непрерывной функции (и, значит, дифференцируемой в смысле Коши) между x_0 и X».

Заметим, что теорема о промежуточных значениях в «Курсе анализа» 1821 года [26, с. 50] приведена так: *Теорема о непрерывной функции.* Если функция $f(x)$ – непрерывная функция переменной x между пределами $x = x_0$, $x = X$ и b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X.

Белост сопровождает теоремы Коши рисунками, подобно тому, как мы, читая студентам лекцию, сопровождаем теорему Лагранжа графиком функции и изображаем хорду, стягивающую крайние точки. Но в курсе Коши нет ни одного рисунка, и нигде не говорится о геометрической

---

[31] Правильной является именно такая транскрипция фамилии автора книги [20], хотя, к сожалению, написание «Белхост» уже закрепилось в русскоязычной библиографии.

интерпретации теорем[32]. Формулировка, приведённая Белостом, носит современный характер.

Далее Белост продолжает: «Доказательство, данное Коши в 1823 году только для функций непрерывно-дифференцируемых на $[x_0, X]$, прославило его новые методы и позволило увидеть различие, которое существует между простой и равномерной непрерывностью.

Но его доказательство неравенства (*) было основано на неверном вообще предположении: если функция f непрерывна (и, значит, дифференцируема в смысле Коши) между x_0 и X и если ε положительное число настолько малое, как мы того хотим, то существует, как утверждает Коши, положительное число δ такое[33], что для всех i, меньших δ, и для всех x между x_0 и X

$$f'(x) - \varepsilon \le \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \le f'(x) + \varepsilon.^{34}$$

В самом деле, это неравенство истинно только для всех x, расположенных между x_0 и X, если только f' равномерно непрерывна между двумя этими числами (или непрерывна в замкнутом ограниченном интервале $[x_0, X]$). Отсутствие чёткого разграничения между непрерывностью и равномерной непрерывностью, как показывает эта ошибка, было слабым местом курса Коши. Как бы то ни было, теорема о конечных приращениях постоянно использовалась и показала себя как центральная теорема дифференциального исчисления» [3, с. 90–91].

Заметим, что и Ампер, и Коши имели в виду как раз замкнутый ограниченный интервал. Все примеры к этой теореме были приведены для элементарных функций, которые равномерно непрерывны на замкнутом интервале. Повторим ещё раз слова Коши: «Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда

---

[32] Рисунков нет ни у Коши, ни у Лагранжа, ни у Ампера. Появляются они только у Лакруа [39], но не к этой теореме. Белост даёт современную геометрическую интерпретацию. Автор благодарит С. С. Демидова за следующее замечание: «*Престарелый Лакруа, конечно, работает в стиле 18-го века. Поэтому рассматривать его в контексте развития анализа как следующего за Лагранжем, Коши и Ампером не стоит. Просто он не усвоил манеры, введённой Лагранжем, которой следуют и Коши, и Ампер (но не Лакруа): в тексте не должно быть чертежей – никакой ссылки на наглядность!*».

[33] Отметим, что у Белоста явно сказано, что по эпсилон выбирается дельта, тогда как у Коши такого явного указания нет.

[34] Заметим, что в русском переводе [3] потеряны штрихи в этой формуле и в цитированной выше формуле (*). Выражаю признательность Г. М. Полотовскому, обратившему внимание на это обстоятельство.

является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку» [27, с. 17].

Никогда больше в своих работах, даже в поздних, Коши не пользовался языком «ε–δ»[35]. Как пишет А. П. Юшкевич, «определение непрерывности у Коши столь же далеко от «эпсилонтики», как и его определение предела» [15, с. 69]. Для того чтобы метод работал, ε и δ должны быть связаны между собой и со структурой интервала (области). Для этого в 1823 году ещё не было развито понимание континуума. Приведём ещё точку зрения Х. Патнэма: «Если бы Вейерштрасс не обосновал метод эпсилон–дельта, пришлось бы актуализировать бесконечно малые, как это случилось с мнимыми числами. Мы постепенно расширяем систему вещественных чисел» [44][36].

Развитию эпсилонтики сопутствовало развитие понятия непрерывности. Рассмотрим вопрос о сходстве определения непрерывной функции у Больцано и Коши.

Б. Больцано

Рис. 3. Бернард Больцано

---

[35] Ответственность за это утверждение лежит на авторе. Все труды Коши доступны в интернете.

[36] Перевод Г. Синкевич.

В 1817 году в Праге вышла небольшая брошюра Бернарда Больцано «Чисто аналитическое доказательство теоремы, о том, что между двумя значениями, имеющими разные знаки, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения» [22, с. 417–476]. Он определяет непрерывную функцию так: «под выражением, что функция $f\,(x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, понимают лишь то, что если x есть какое-нибудь из этих значений, то разность $f(x + \omega) - f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая данная величина, если можно принять ω столь малым, сколь угодно, или пусть будет $f(x + \omega) = f(x) + \Omega$» [22, с. 427–428].

Мы можем отсюда заключить, что Больцано был знаком с работами Лагранжа и Лакруа.

Заметное сходство идей Коши и Больцано привело английского историка математики Айвора Граттан-Гиннесса к спорной мысли о заимствовании [33][37]. Он предполагает, что Коши мог прочитать работы Больцано, имевшиеся в Национальной библиотеке (тогда Bibliothèque Impériale) в Париже, что в «Курсе анализа» Коши 1821 года встречаются идеи и формулировки Больцано 1817 года. Сравнивая формулу 1797, 1806 и 1813 годов Лагранжа [41, с. 24]: $f\left(x+i\right)= f\left(x\right)= iP$, формулу Коши 1823 года [10, с.10]: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, а также формулу конечных приращений, приведённую выше, мы видим, что Коши следовал своим учителям Лагранжу и Лакруа. В предисловии к «Курсу анализа» Коши благодарит Пуассона, Ампера и Кориолиса [26, с. VII], но не упоминает о Больцано. Теорема о непрерывной функции у Больцано звучит так: «Между двумя значениями функции, имеющей разные знаки, лежит хотя бы один корень уравнения»; у Коши: «Если между пределами $x = x_0$, $x = X$ дана функция непрерывной переменной $f(x)$ и b расположено между $f(x_0)$

---

[37] По поводу этой спорной статьи с разрешения С. С. Демидова привожу его мнение: *«О возможных (или невозможных) идейных связях Больцано и Коши, о которых идёт речь в путанной и очень субъективной статье А. Граттан-Гиннеса: Айвор, конечно, волен любить или не любить любого из математиков существующих и уже умерших, но статья его крайне бездоказательная и реакция на неё специалистов (например, А. П. Юшкевича) была далеко не положительная. Крайняя нелюбовь, которую испытывают к Коши, основана на идеологии: Коши «был одним из самых неприятных людей своего времени». Отсюда нелюбовь к нему Абеля, его студентов в Политехнической школе. Отчасти такое отношение переламывает Бруно Белост. В его книге Коши просто человек определённых убеждений, которые никогда не были популярны во Франции. Человек, который всегда плыл против течения. Делать отсюда крайние выводы («невысокая научная щепетильность» и т. п.) следом за Граттан-Гиннесом нужно очень аккуратно. Его «щепетильные» противники рассыпали набор его книг, содержавших выдающиеся научные результаты».*

и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение для x, расположенного между x_0 и X» [26, с. 50].

Граттан-Гиннесс соглашается с тем, что в бумагах Коши не сохранилось никаких письменных свидетельств о работах Больцано, в библиотеках нет пометок о том, что Коши читал Больцано. Но он приводит много параллельных формулировок теорем Больцано и Коши. Приводит он также богатый материал о сложном характере Коши и о его невысокой научной щепетильности: «Если Коши и был величайшим математиком своего времени, он был одним из самых неприятных людей своего времени: католический фанатик и бурбонист до абсурда, он всё время утверждал своё превосходство во всех направлениях своей работы [33, с. 393]. Хорошее подтверждение этому мы найдём в письме одного молодого человека: “Коши глуп, и никто не может его понять, хотя он такой математик, что всегда знает, как нужно рассуждать о математике, <…> он крайний католик и фанатик” [16, с. 45–46]; [17, с. 259]. Этим человеком был Нильс Хенрик Абель, посетивший Париж в октябре 1826 года»[38].

Н. Х. Абель

Рис. 4. Нильс Хенрик Абель

---

[38] Перевод Г. Синкевич.

В том же году Абель опубликовал заметку о сходимости рядов [18, с. 311–329] и об ошибке Коши[39], после чего Коши не стал печатать его работу об эллиптических функциях. Более того, когда Берт Михаэль Хольмбоэ, школьный учитель Абеля, приехал в 1839 году в Париж для того, чтобы получить в Академии наук работу Абеля для посмертного издания его трудов, ему не возвращали рукопись до тех пор, пока он в 1841 году не поднял этот вопрос на правительственном уровне[40]. В этой же работе впервые сформулирована связь между непрерывностью функции в точке и пределом: «Функция $f(x)$ называется непрерывной функцией x между пределами $x = a$ и $x = b$, если для любого значения между этими пределами величина $f(x - \beta)$ при постоянно убывающих значениях β сколь угодно приближается к пределу $f(x)$» [15, с. 72, пер. А. П. Юшкевича].

Известно, что Больцано прочитал «Курс анализа» Коши, так как в 1830 году в рукописи по анализу он полемизирует с Коши в вопросе о формулировке непрерывности [23, с.15, с. 94]. Возможно, Больцано прочитал немецкий перевод «Курса анализа», изданный в 1828 в Кёнигсберге. После свержения Бурбонов в 1830 году Коши был в изгнании, сначала в Италии, в Турине, а затем, между 1833 и 1835 годами, в Праге, где он стал учителем сына свергнутого французского короля Карла X. Узнав о приезде Коши в Прагу, Больцано в августе 1833 пишет своему другу Ф. Прихоньскому: «Новость о присутствии Коши необычайно интересна для меня. Среди всех ныне живущих математиков он единственный, кого я больше всех уважаю и с кем я чувствую наибольшее родство; я обязан его изобретательному мышлению некоторыми наиболее важными доказательствами. Я очень тебя прошу рекомендовать меня ему и сказать, что я сразу приеду в Прагу, чтобы с ним познакомиться, если – после того, что ты скажешь мне о его распоряжении – не смогу надеяться на встречу с ним в конце сентября» [24, с.156].

Несколько встреч состоялось. Больцано пишет в декабре 1843 года: «Математик Коши в 1834 и 1835 годах был в Праге, где мы несколько раз встречались в течение нескольких дней, которые я обычно провожу в Праге (на Пасху и осенью). После моего отъезда я попросил Кулика передать ему (1834) очерк на четвертушке листа, где я набросал для Коши

---

[39] «Сходящийся всюду ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную функцию». В 1826 году Абель первый заметил ошибку Коши и привёл контрпример.

[40] Известны и другие эпизоды из жизни Коши, связанные с утратой присланных авторами работ, и с появлением в публикациях Коши сходных результатов. Можно назвать истории с рукописями Фурье, Галуа, Грассмана.

отчасти по-французски по поводу известной задачи о спрямляемости кривой, потому что я и в самом деле боялся, что он найдёт «Записку о трёх проблемах спрямляемости, вычисления площадей и объёмов», опубликованную в 1817, слишком трудной. В начале прошлого года я просматривал некоторые сочинения Коши в обычной цветной обложке и, отогнув последнюю страницу с анонсом работ, я с удивлением обнаружил его небольшую заметку по тому же вопросу, которую он издал литографией в Париже в 1834 (как будто бы сразу после прочтения моей маленькой заметки). Естественно, я очень захотел прочитать эту заметку» [45, с. 225–226].

В 1847 году Больцано полемизирует с Коши, упрекая его в ошибочном определении бесконечного как переменной величины и в определении границы безграничного возрастания, а в определении бесконечно малого – границы бесконечного убывания [4, с. 14].

Выводы, которые делает Граттан-Гиннесс из своего исследования, таковы: «Характеризуя гений Коши, я не хотел бы слишком подчёркивать, как чутко реагировал он на внешние стимулы, я пытался не осуждать, а описать глубину и широту его оригинальности. Вне всякого сомнения, он и Гаусс были главными математиками первых десятилетий девятнадцатого века: поэтому его труды и вызывают особенный интерес историков. Обратившись к памфлету Больцано 1817, возможно, что Коши, занятый и активный математик-исследователь и профессор трёх парижских колледжей, просто не обеспокоился упомянуть его или даже забыл, что он его читал (хотя лично я не считаю это объяснение удовлетворительным).

Я отмечал, что Коши знал европейские языки: в отношении немецкого, возможны ясные указания (судя по многочисленным примерам), что он в 1817 рецензировал рукопись на немецком, посланную в Академию наук, и он рецензировал Der barycentrische Calcul Мёбиуса в 1828 году. Отметим также ещё одно «совпадение идей» с малоизвестными немецкими сочинителями, поразительно похожие на историю с памфлетом Больцано. В апреле 1847 Грассман, тогда школьный учитель в Штеттине, послал Коши два экземпляра своего Ausdehnungslehre 1844 г., но не получил никакого подтверждения; спустя некоторое время тем не менее с 1847 по 1853 Коши публикует несколько работ по «clefs algébriques», которые были основаны на тех же идеях и даже имели те же обозначения» [33, с. 398][41].

---

[41] Перевод Г. Синкевич.

Развитие концепции непрерывности во второй половине XIX века

В истории науки есть немало примеров одновременного возникновения идеи у разных учёных. Можно не согласиться с Граттан-Гиннесом в том, что в основе этого лежало заимствование. Традиция предшествующей постановки проблемы могла быть настолько сильна, что обусловила одинаковый отзыв у математиков, работавших в разных странах. Так было с неевклидовой геометрией. Так было с понятием непрерывной функции, в чём Больцано и Коши шли от Лагранжа. Так было с понятием иррационального числа и непрерывности континуума, когда Мере, Гейне и Кантор одновременно предложили схожие концепции, которые основывались на критерии сходящейся последовательности Коши.

В 1868, 1869 и 1872 годах выходят работы Шарля Мере, где он с помощью предела строит теорию иррациональных чисел. Наиболее полное изложение его теории в томе 1872 года [43], комментарии можно найти в работах Пьера Дюгака [7] и [28].

С 1854 года Карл Вейерштрасс начинает читать лекции в Берлинском Промышленном институте и Берлинском университете. Именно у него появляется такая символика, как $\lim\limits_{n=\infty} p_n = \infty$ (опубликовано в 1856 году) [15, с. 76]).

К сожалению, сам Вейерштрасс не публиковал и не редактировал своих лекций, в большинстве случаев они дошли до нас в записях его слушателей. Эдвард Гейне сокрушался по этому поводу: «Принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию» [36, с. 172][42]. Но основная концепция метода «ε–δ» формировалась в его берлинских лекциях. Как пишет А. П. Юшкевич, «Современное изложение дифференциального исчисления, с его ε, δ-техникой формулировок и доказательств, восходит, как известно, к лекциям Вейерштрасса в Берлинском университете, обработки которых были изданы его слушателями» [12, с. 192].

Наиболее ранний известный текст Вейерштрасса с использованием техники «ε–δ» – это конспект его лекции по дифференциальному

---

[42] Перевод Г. Синкевич.

исчислению, прочитанной в летнем семестре 1861 года в Берлинском королевском ремесленном институте. «Конспект был составлен учеником Вейерштрасса Г. А. Шварцем и хранится теперь в институте Миттаг-Леффлера в Швеции. Шварцу было тогда 18 лет и конспект он составил для себя лично, а не для печати» [12, с.192]. Записи Шварца были обнаружены и опубликованы П. Дюгаком [28]. В этих записях впервые появляется определение непрерывной функции на языке эпсилонтики: «Если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$; разность $f(x+h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x + h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению ещё меньших, чем δ, $f(x+h) - f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – *непрерывная функция* аргумента, или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом» [12, с.189].

В 1872 году выходит статья Э. Гейне «Лекции по теории функций», где он даёт определение непрерывной функции по Вейерштрассу на языке эпсилон–дельта [36, с.182].

В 1885 году вышел учебник О. Штольца «Лекции по общей арифметике согласно новой точке зрения» [46], в котором Штольц излагает определение Коши по Вейерштрассу, на языке «ε–δ».

Легенда о том, что язык эпсилонтики создал Коши, появилась с лёгкой руки А. Лебега в его «Лекциях по интегрированию и отысканию примитивных функций» 1904 года: «Для Коши функция $f(x)$ непрерывна для значения x_0, если, каково бы ни было положительное число ε, можно найти число η(ε) такое, что неравенство $|h| \leq \eta(\varepsilon)$ влечёт за собой $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \varepsilon$; функция $f(x)$ непрерывна в (a, b), если соответствие между ε и η(ε) может быть выбрано независимо от x_0 для любого x_0 в (a, b)» [11, с.13]. По этому поводу А. П. Юшкевич пишет: «В своём знаменитом труде по теории интегрирования

А. Лебег почему-то приписывает Коши определение непрерывности функции в точке, сформулированное в терминах «эпсилонтики» начала XX века и характеризует это определение как классическое. Это один из многих примеров того, как модернизируют высказывания авторов прежних времён даже столь крупные математики, каким был А. Лебег» [15, с. 69].

К сожалению, большинство исторических ошибок происходит оттого, что авторы не обращаются к первоисточникам, а верят опосредованному вольному пересказу, как правило, использующему современный язык. Мы видели выше интерпретацию Белоста через супремум и инфимум, добавление им геометрического образа, интерпретации Лебега, Штольца и другие. В 1978 году вышел «Справочник математических терминов» Н. В. Александровой [1], в котором в статье «Предел» написано: «Определение предела через ε и δ дал Больцано (1817), а за ним Коши (1820)» [1, с.13]. Как мы с вами убедились, это не так. Больцано в 1817 и Коши в 1821 году дали определения предела в качественной форме и определения непрерывной функции на языке приращений; Коши один раз применил ε и δ при улучшении доказательства Ампера, но Коши использовал ε и δ как конечные оценки погрешности, где δ не зависит от ε. Больцано нигде не использует эту технику. Согласно конспекту лекции Вейерштрасса 1861 года, именно Вейерштрасс был первым, кто использовал язык «ε–δ» как метод.

В 1821 году, когда Коши писал свой «Курс анализа», в Берлине родился Эдвард Гейне, который спустя 51 год сформулирует понятие равномерной непрерывности. Вейерштрассу в 1821 году было 6 лет, и прошло около 40 лет, прежде чем он использовал эпсилонтику на полную мощь.

Литература к VI главе

1. *Александрова Н. В.* Математические термины: Справочник / Н. В. Александрова. – М.: Высшая школа, 1978. – 190 с.
2. *Башмакова И. Г.* О роли интерпретации в истории математики / И. Г. Башмакова // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1986. – Вып. XXX. – С. 182–194.
3. *Белхост Б.* Огюстен Коши / Б. Белхост. – М.: Наука, Физматгиз, 1997. – 176 с.
4. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного / Б. Больцано; пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса: Mathesis, 1911. – С. 14.

5. *Демидов С. С.* «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера / С. С. Демидов // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1990. – Вып. XXXII–XXXIII. – С. 34–39.

6. *Дорофеева А. В.* Формирование понятия непрерывной функции / А. В. Дорофеева // История и методология естественных наук. – Вып. XI – математика и механика. – М.: МГУ, 1971. – 37–50 С.

7. *Дюгак П.* Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса / П. Дюгак // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С. 176–180.

8. История математики. – М.: Наука, 1972. – Т. 3. – 496 с.

9. *Коши О.* Алгебрический анализ: пер. с фр. Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина / О. Коши. – Lepzig : Druck von Bär & Hermann, 1864. – 252 с.

10. *Коши О.* Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). Пер. Буняковского / О. Коши. – СПб., 1831. – 254 с.

11. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег. – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 324 с.

12. *Хрестоматия по истории математики*. Математический анализ / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.

13. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых (1748) / Л. Эйлер. – М.: Физматгиз, 1961 – Т. II.

14. *Юшкевич А. П.* Л. Карно и конкурс Берлинской академии наук 1786 на тему о математической теории бесконечного / А. П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С. 132–156.

15. *Юшкевич А. П.* Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса / А. П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1986. – XXX. – С. 1–81.

16. *Abel N.* Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance / Correspondance d`Abel. – Christiana. 1902. – 135 p.

17. *Abel N.* Oeuvres complètes de N. H. Abel, par S. Lie et L. Sylow. – Eds. 2 vols. Christiania, 1881.

18. *Abel N.* Untersuchungen über die Reihe / N. Abel // Journ. Rei. Ang. Math. – 1826. – No. 1. – P. 311–329.

19. *Ampére A.* Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque / Mémoir par M. Ampére, Répétiteur à l'Ecole Politechnique // Journal de l'Ecole Politechnique, 1806. – Cahier 13. – P. 148–181.

20. *Belhoste B.* Cauchy. 1789–1857 / B. Belhoste. – Paris, Belin, 1985. – 224 p.

21. *Błaszcyk P.* Ten misconceptions from the history of analyses and their debunking / P. Błaszcyk, M. Katz, D. Sherry // Foundation of Science ArXiv : 12 024 153 v. 1 [math. HO] 19 Feb. 2012. 46 p. http://arxiv.org/abs/1202.4153

22. *Bolzano B.* Rein analytisches Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle

Wurzel der Gleichung liege. – Prague, 1817// Bernard Bolzano (1781–1848). Bicentenary. Early mathematical works. – Prague, 1981. – P. 417–476.

23. *Bolzano B.* Schriften 1 / B. Bolzano. – Prague, 1930.

24. *Bolzano B.* Der böhmische Vomärz in Briefen B. Bolzanos an F. Prĭhonský // Veröff. Inst. Slav., Dtsch. Akad. Wiss. – Berlin, 1958. – 11. – 306 p.

25. *Cajory F.* A history of the conception of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse / F. Cajory. – Chicago, London, 1919. – 322 p.

26. *Cauchy A.-L.* Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. – Ser. 2. – T. 3. – P. 1–471.

27. *Cauchy A.-L.* Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal / A.-L. Cauchy. – (1823). – Oeuvres Ser. 2. – P. 9–261.

28. *Dugac P.* Elements d`analyse de Karl Weierstrass / P. Dugac. – Paris, 1972.

29. *Euler L.* Institutiones calcului differentialis (1755) / Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление: в 2-х т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

30. *Fourier J. B.* Théorie analytique de la chaleur (1822) / J. B. Fourier // Oeuvres. – Paris, 1888. – v. 1. – P. 139.

31. *Gauss K .F.* Grundbegriffe der Lehre von der Reihen / K. F. Gauss // Werke. Leipzig: B. Bd. X/1, 1917. – S. 390–394.

32. *Grabiner, J.* Who gave you the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus / J. Grabiner // The American Mathematical Monthly, 1983. – March. – Vol. 90. – No 3. – P. 185–194.

33. *Grattan-Guinness I.* Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century / I. Grattan-Guinness // Archive for History of Exact Sciences. – Springer Verlag. Berlin–Heidelberg–New York, 1970. – Vol. 6. – No 3–5. – P. 372–400.

34. *Grattan-Guinness I.* The mathematics of the past: distinguish its history from our heritage / I. Grattan-Guinness // Historia mathematica 31 (2004). – P. 163–185.

35. *Gray J.* Plato`s ghost. The modern transformation of mathematics / J. Gray. – NY, Princeton: Princeton University Press. – 2008.

36. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. – 1872. – 74. – S. 172–188.

37. *L`Huilier S.-A.-J.* Exposition élémentaire des principles des calcul suprieurs / S.-A.-J. L`Huilier, 1786.

38. *Koetsier T.* Lakatos, Lakoff and Núňez: Towards a Satisfactory Definition of Continuity. In Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives // Edited by G. Hanna, H. Jahnke, and H. Pulte. Springer. – 2009.

39. *Lacroix S. F.* Traité du calcul differentiel et du calcul intégral / S. F. Lacroix. Paris, 1797, 1798, 1800. – 572 p.

40. *Lacroix S. F.* Traité élementaire de calcul différentiel et de calcul intégral / S. F. Lacroix. – Paris, 1806, 1828. – 646 p.

41. *Lagrange J.* Théorie des fonctions analytique / Oeuvres de Lagrange. – Paris, 1881. – V. 9. – P. 24 .

42. *Leathem J. G.* Volume and Superface Integrals Used in Physics / Leathem J. G. – 1905.

43. *Méray Ch.* Nouveau précis d'analyse infinitesimale / Par Charles Méray. Publication : F. Savy. XXIII – Paris, 1872. – 310 p.

44. *Putnam, H.* What is mathematical truth? / H. Putnam. Proceedings of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston, Mass., 1974) // Historia Mathematica, 1975. – 2. – No 4. – P. 529–533.

45. *Seiderlová, I.* / Bemerkung zu den Umgängen zwischen B. Bolzano und A. Cauchy / I. Seiderlová // Čas. Pěst. Mat., 1962. – 87 – C. 225–226.

46. *Stolz O.* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten / O. Stolz. – Bd. I. Leipzig, 1885. – S. 156–157.

ГЛАВА VII. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ У ШАРЛЯ МЕРЕ

Рис. 1. Шарль Мере

Во второй половине XIX века продолжалась работа по упорядочению математического анализа, начатая Огюстеном Коши, и продолженная Карлом Вейерштрассом, Эдвардом Гейне, Георгом Кантором, Рихардом Дедекиндом и Шарлем Мере. В 1872 году у каждого из них вышли работы, связанные с арифметизацией анализа. Это лекции Вейерштрасса «Элементы арифметики», изданные его учеником Е. Коссаком [10], статья Гейне «Элементы учения о функциях» [1, 9], «Непрерывность и иррациональные числа» Дедекинда [2], «Новый точный инфинитезимальный анализ» Шарля Мере [13].

Рассмотрим здесь работы Шарля Мере, не получившие признания, но от этого не менее значимые.

Шарль Мере (Charles Méray) родился 12 ноября 1835 г. в Шалон-сюр-Сен, умер 2 февраля 1911 в Сона-и-Луара. В 11-летнем возрасте его отличало благоговейное отношение к математике, хотя учитель отмечал, что мальчик мало что понимал в геометрии и алгебре, да и сам Мере говорил о себе: «Я был влюблён в математику без понимания». Он с увлечением читал историю математики Монтюкла, а в 18-летнем возрасте поступил в Нормальную школу в Париже, показав первый результат среди поступавших. Своим учителем считал Шарля Брио. С 1857 по 1859 год работал учителем лицея в Сен-Квентине, а затем взял отпуск и семь лет жил в деревне в Бургундии, занимаясь виноделием. В 1866 году он стал читать лекции в университете Лиона, а с 1867 года и до конца жизни был профессором математики в университете Дижона. В 1899 году стал членом-корреспондентом Парижской Академии наук. Первая его работа по геометрии вышла в 1868 году, а в 1869 году в Дижоне вышла работа, оцененная значительно позже, в которой он первым даёт строгое определение иррационального числа: «Замечания о природе определённых величин с использованием пределов этих величин» [12]. Ему принадлежат несколько курсов анализа, выходивших с 1872 года [13, 15].

В работе [12] Мере формулирует два принципа теории иррациональных (неизмеримых, incommensurables) чисел: «1. Переменная величина ν, которая последовательно принимает значения ν_1, ν_1, ..., ν_n, ..., стремится к некоторому пределу, если её члены будут постоянно возрастать или убывать, оставаясь при этом в первом случае меньше, а во втором случае больше некоторой фиксированной числовой величины. 2. Переменная ν определяется ещё дополнительным свойством, что разность $\nu_{n+p} - \nu_n$ стремится к нулю при неограниченно возрастающем n, каково бы ни было отношение между n и p.

Определим также эквивалентные возрастающие последовательности:

Если m и n бесконечно возрастают, разность $u_m - \nu_n$ двух возрастающих последовательностей сходится к нулю для некоторого зависимого промежуточного (взаимно обоюдного) индекса между этими индексами, легко выяснить, как достигается бесконечно малая для всякого другого закона. Говорят также, что возрастающие переменные u и v эквивалентны.

Их пределы (подлинные или фиктивные): предположим, что u и v имеют пределами U и V (добавим, что это рациональные числа). Если u и v эквивалентны, тогда U и V равны между собой. Напротив, допустим, что u и v не имеют предельной (числовой) точки. Будет оправданным, выражаясь фигурально, сказать, что они имеют равные пределы».

Эти пределы он называет, в отличие от числовых пределов, «фиктивными пределами» возрастающих последовательностей.

Рассмотрим рассуждения Мере из курса 1872 года. Он был издан в Париже, получил невысокую оценку Германа Лорана [11], и остался незамеченным соотечественниками, а франко-прусская война затруднила знакомство с ним немецких математиков. Лоран писал: «Методы, применяемые в этой работе столь тонки и деликатны, что неизвестно, будут ли они понятны даже знатокам абстракций высшего Анализа, и стоило ли так резко разрушать многолетние традиции» [11, с. 25]. В качестве причины невысокой популярности трактатов Мере П. Дюгак называет его «чрезвычайно личный язык, который затрудняет чтение текста» [7, с. 348].

Мере следовал классической традиции Лагранжа и Коши, излагавших анализ на основании рядов Тейлора и Мак Лорена. Коши в 1821 году определял иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, и даже определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень [6, с. 337, 341]; или [5, с. 382, 388]. Рассматривались только целые функции, т. е. могущие быть разложены в ряд по целым степеням, и Мере неоднократно подчёркивает, что этого достаточно для нужд анализа. Мере опирается на критерий сходимости Коши, но для своей теории вводит много новых понятий: фиктивного предела, олотропности[43] и связанных с ними. Он считал, что «разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые, никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются, перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций»[12]. Тем не менее, Мере идёт дальше Коши, – он определяет операции над иррациональными числами строго и последовательно, и на их основе вводит понятие непрерывной функции. Мере вводит понятие олотропной функции – аналог равномерно непрерывной.

Поразительно, что точно так же и в том же году рассуждали в немецком городе Галле Кантор и Гейне в своих работах [4, 9].

Мере называет иррациональные числа (не разделяя их на алгебраические и трансцендентные) неизмеримыми.

---

[43] Этот термин принадлежит Мере и в дальнейшем никем не употреблялся.

Вот его рассуждение [13, курсив Мере]:

«Назовём вариантой числовое значение (целое или дробное, положительное или отрицательное) $\nu_{m,\,n,\dots}$, величина которого зависит от значения целых m, n, …, которые берутся в любых возможных комбинациях величин, и которые нумеруются с помощью этих индексов, например:

$$v_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}$$

$v_{m,n} = \dfrac{1}{mn}$ – это варианта двух индексов.

Если существует число V, для которого при достаточно больших m, n, …, разность $V - \nu_{m,\,n,\dots}$ по абсолютному значению будет произвольно мала для достаточно больших величин индексов, то говорят, что варианта $\nu_{m,\,n,\dots}$ стремится или сходится к пределу V.

Если $V = 0$, варианта $\nu_{m,\,n,\dots}$ называется бесконечно малой. Таковой будет, например, разность между вариантой и её пределом.

Среди вариант, не имеющих пределов, нужно отметить такие, у которых абсолютная величина может приобрести значение, большее любого наперёд заданного числа; их называют *бесконечными* величинами; а те, которые наоборот, имеют числовые значения, меньшие, чем некоторое конечное число, называются *конечными*.

1. Нетрудно установить следующие утверждения:

I. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого числа нескольких конечных вариант и постоянных значений будет конечной величиной. То же для отношения двух подобных величин, у которых знаменатель не является бесконечно малым.

II. Произведение бесконечно малой на постоянную или конечную величину, сумма некоторого количества таких произведений (положительных степеней), на бесконечно малую, обратная к бесконечно большой, будет бесконечно малой вариантой.

III. Степень с бесконечным (положительным) показателем некоторой постоянной величины или варианты будет бесконечной, или бесконечно малой смотря по тому, какое у этой величины окончательное абсолютное значение: превосходит ли оно величину >1, или оно меньше, чем величина <1.

IV. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого количества некоторых вариант, имеющих пределы, и постоянной величины, имеют в пределе результат, который получится, если подставить в этом вычислении предел этих значений. То же самое относится и к частному двух подобных величин, если знаменатель не является бесконечно малым.

Неизмеримые числа

Назовём сходящейся такую варианту $\nu_{m\,+\,n,\dots}$, для которой разность между $\nu_{m\,+\,p,\;m\,+\,q,\dots}$ и $\nu_{m\,+\,n,\dots}$ для произвольных p и q будет меньше любой бесконечно малой варианты с индексами m и n, короче говоря, такой, что эта разность стремится к нулю для m, n бесконечных независимо от p и q.

Вот примеры такой сходимости:

1^0 Варианты, имеющие предел. Так как $v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots} = = \left(V - v_{m,n,\dots}\right) - \left(V - v_{m+p,n+q,\dots}\right)$ – это разность двух бесконечно малых вариант.

2^0 Конечные варианты, которые, начиная с некоторого значения индексов, уже не растут и не уменьшаются (говоря алгебраически). Это легко доказывается.

Две варианты $\nu_{m,\ n,\dots}$ и $\nu'_{m',\ n',\dots}$ эквивалентны, когда их разность $\nu_{m,\ n,\dots} - \nu'_{m',\ n',\dots}$, рассматриваемая как единая варианта с индексами $m, n,\dots m', n',\dots$, будет бесконечно малой.

4. Установив это, легко докажем следующее.

Сумма, произведение (или произведение степеней) некоторого количества сходящихся вариант, и неизменных величин, будет сходящейся вариантой, эквивалентной такой, которая получилась бы заменой соответствующих эквивалентов. То же верно и для частного, если знаменатель не является бесконечно малым.

5. Это утверждение тривиально, если варианты имеют пределами определённые числа, но в том случае, когда некоторые из них не сходятся ни к какому пределу, *выражаемому численно*, это утверждение тоже остаётся справедливым.

Тем не менее, согласимся, что это в переносном смысле означает, что инварианта сходится к некоему фиктивному *неизмеримому* пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны; сумма, произведение и т. д. вариант, сходящихся к какому-либо пределу, подлинному или фиктивному, в зависимости от случая, есть сумма или произведение или т. п. их пределов, подлинных или фиктивных. И, если дополнить эти условия, верны предложения, которые мы сформулировали, равно как и цитируемые теоремы.

6. *Сходящаяся варианта, не являющаяся бесконечно малой, конечна при сохранении определённого знака*. По нашей гипотезе существуют бесконечные комбинации величин m, n, … , которым соответствуют величины $\nu_{m,\ n,\ldots}$, превосходящие по абсолютному значению фиксированное число δ. Придадим величинам m, n, … такие достаточно большие значения, чтобы разность $\nu_{m\,+\,p,\ m\,+\,q,..} - \nu_{m,\ n,\ldots}$ была бы численно меньше, чем δ, каковы бы не были p, q, … Так как $\nu_{m\,+\,p,\ m\,+\,q,..}$ равно $v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$, это равенство справедливо для всех p, q, …, короче говоря, для всех индексов, равных или превосходящих знак $\nu_{m,\ n,\ldots}$.

Более того, если две варианты $\nu_{m,\ n,\ldots}$ и $\nu'_{m',\ n',\ldots}$ сходятся к несоизмеримым пределам, и не являются эквивалентными, их разность $\nu_{m,n,\ldots} - \nu'_{m',n',\ldots}$ конечна и сохраняет определённый знак. Смотря по тому, каков этот знак, + или –, мы говорим, что неизмеримый предел первой больше или меньше, чем второй.

Таким же образом говорят, что измеримое число a больше или меньше неизмеримого конечного числа для варианты $\nu_{m,\ n,\ldots}$, смотря по тому, как получается, $a - \nu_{m,\ n,\ldots} >$ или < 0.

Если по абсолютному значению эта конечная разность остаётся меньше ε, назовём *значением* неизмеримого числа приближённым в соответствии с ε, с избытком в первом случае и с недостатком во втором случае.

Мы будем определять все неизмеримые числа, приближая их значения с помощью некоторого δ, каким бы малым его не вообразить.

Действительно, пусть $\nu_{m,\ n,\ldots}$ – сходящаяся соответствующая варианта, и для данных достаточно больших m, n, …, при которых $\nu_{m\,+\,p,\ m\,+\,q,..} - \nu_{m,\ n,\ldots}$ остаётся по абсолютной величине меньше, чем 1/2 δ, каковы бы ни были p, q, …

Тождество $v_{m+p,n+q,\ldots} = v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$ приобретает вид $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\ldots} > 0$ при $\delta < 0$, при величине числа $< \delta$.

Тогда $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right)$, $\left(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta\right)$ будут приближениями к неизмеримому числу сообразно δ, одно с избытком, второе с недостатком.

7. Это утверждение хорошо проверяется на примерах. Положительное неквадратное число *a*, не являющееся точным рациональным квадратным корнем какой-либо числовой величины, может быть представлено бесконечным множеством квадратных вариант, которые к нему сходятся. Мы утверждаем, что эти рациональные (положительные) будут сходящимися и эквивалентными друг другу вариантами.

Действительно, пусть $v_n^2 = a + \varepsilon_n$, $v_{n+p}^2 = a + \varepsilon_{n+p}$, ε_n, ε_{n+p} сходятся к нулю при бесконечно возрастающих индексах, и тогда $v_{n+p} - v_n = \dfrac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{v_{n+p} + v_n}$.

Знаменатель не является бесконечно малым, потому что в противном случае v_n^2, v_{n+p}^2 сходятся к нулевому пределу, отличному от *a*, числитель же нет, тогда $v_{n+p} - v_n$ стремится к нулю при бесконечно возрастающем *n*, независимо от соотношения между *n* и *p*, что и доказывает сходимость варианты ν_n.

Таким же образом доказывается эквивалентность двух вариант, квадраты которых сходятся к одному и тому же числу. *Это означает, что все положительные числа рационально измеримы или неизмеримы.* Они употребляются для обозначения рационального фиктивного *a*, означая истинное рациональное, когда *a* есть квадратное число.

Таким образом, мы сказали, что квадраты многих вариант имеют общий предел *a*, и все могут стремиться к неизмеримому пределу $\sqrt{a}$.

Равенство $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ означает, что квадраты двух вариант сходятся к числу 8, и другая к числу 2, первая эквивалентна удвоенной второй.

Неравенство $1 < \sqrt{2} < \sqrt{8}$ выражает избыток первой над второй и их обеих перед единицей завершается знаком +.

В подобном равенстве $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ мы будем воспринимать рациональный корень четвёртой степени как биквадратный из варианты, сходящейся к *a* и равен рациональному корню из квадрата такой эквивалентной варианты, квадрат которой равен *a*.

Рассуждая таким образом, *мы всегда можем получить утверждение о неизмеримых числах, выражающее основные отношения между числами в их собственном смысле.*

Надо сказать ещё кое-что о неизмеримых вариантах. Пусть $u_{m,\,n,\dots}$ – это последовательность величин такого рода, и величины $\nu_{m,\,n,\dots}$ приближённо отличаются от неё на величину $\varepsilon_{m,\, n, \dots}$, причём эта последняя бесконечно мала.

Если $\nu_{m,\, n, \dots}$ – сходящаяся величина, мы делаем заключение, что обе величины стремятся к одному и тому же пределу, измеримому или нет, а именно к пределу $\nu_{m,\, n, \dots}$.

Так как по абсолютной величине $v_{m,n,\dots} - u_{m,n,\dots} < \varepsilon$, $v_{m+p,n+q,\dots} - {}$ $- u_{m+p,n+q,\dots} < \varepsilon$, тогда $(v_{m+p,n+q,\dots} - v_{m,n,\dots}) < (u_{m+p,n+q,\dots} - u_{m,n,\dots}) + (\varepsilon_{m,n,\dots} + \varepsilon_{m+p,n+q,\dots})$, где в последней части второе слагаемое бесконечно мало, условие для сходимости u заключается в том, что её величины в разных случаях (разновременно) измеримы. Необходимо добиться, чтобы разность $u_{m+p,\, n+q\, ,\dots} - u_{m,\, n,\, \dots}$ была бы меньше варианты с индексами m, n, …, p, q, …, бесконечно малой для неограниченно возрастающих m, n, …, и для некоторых фиксированных p, q, …

Теперь мы полагаем необходимым утверждать, что далее мы будем понимать неизмеримые числа в том смысле, который мы продемонстрировали выше, в их приближении к бесконечно малым, бесконечным и конечным».

Далее Мере определяет непрерывную функцию и расширяет это понятие, создав новый термин «олотропная функция»:

«Пусть $f(x,\ y,\dots)$ – сумма целых рядов, R_x, R_y,... – их области (круги) сходимости, $R_x°$, $R_y°$,... – соответственно меньшие положительные величины. Если x', y',…, x, y,… – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках O_x, O_y, ... как центры областей $R_x°$, $R_y°$,..., таким образом, что все разности $x' - x$, $y' - y$,… будут бесконечно малыми, и разность $f(x', y', \dots) - f(x, y, \dots)$ так же стремится к нулю.

Рассмотрим сумму N первых элементов целого (по целым степеням) ряда. Заменив варианты на сходящиеся варианты, которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, получим сходимость вариант и их эквивалентность друг другу, при N – индексе замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных. Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

Если x', y',… *соответственно стремятся к данным пределам* x, y, …, *расположенным во внутренней части круга сходимости,* $f(x', y',\dots)$ *стремится к* $f(x, y,\dots)$.

Будем говорить, что функция $f(x, y,\dots)$ олотропна (olotrope) на порциях S_x, S_y,... вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных x, y, …, ограниченных этими областями, $f\left(x+h, y+k,\dots\right)$ представляет собой ряд по целым степеням, а h, k, … таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие δ_x, δ_y,..., все не равные нулю.

Назовём δ_x, δ_y,... *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f\,(x, y, \dots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x-x_0, y-y_0,\dots$, где $x_0, y_0,\dots$ обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек x, y, …, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается вместо $x-x_0, y-y_0,\dots$ можно писать h, k, … $f\left(x_0+h, y_0+k,\dots\right)$.

Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера».

Понятие олотропной функции приближается к понятию равномерно непрерывной функции, сформулированному в те же годы Кантором и Гейне. К сожалению, оно не было развито ни в последующих работах Мере, ибо он работал только с целыми функциями, ни его коллегами. Мере излагает классический анализ с помощью введённых понятий – определяет производную, теорему о среднем, теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Ферма о необходимом условии экстремума, теорию интеграла и дифференциальных уравнений.

Таким образом, Мере расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Он отвергал физические и геометрические образы ради создания внутреннего языка чистого анализа [14, с. 15–16].

Сейчас французы чтут память своего соотечественника, называя построение иррационального числа построением Мере – Кантора – Гейне. Именем Шарля Мере названо бургундское вино.

Рис. 2. Вино «Шарль Мере»

Приложение к главе VII

Отрывок из лекций Мере и структура его курса[44] [13, с. 16–277] «Новый точный анализ бесконечно малых (Nouvean prècis d'analyse infinitismale) »

Функции и независимые переменные.

19. Операции над величинами (действительными или мнимыми) определяются обычным образом. Через *независимые* переменные, которые так можно определить, выражаются другие, которые зависят от первых, и которые мы называем *функциями* первых.

По отношению к функциям, эти первые величины принято называть независимыми переменными, мы обозначаем их x, y, … , а функции соответственно $f(x, y, \ldots)$.

---

[44] Перевод Г. Синкевич.

Параметры, *константы* и *коэффициенты* функций, величины которых часто употребляются в общем исчислении, но они изменяются в меньшей степени и рассматриваются обычным образом.

Уравнение между действительными или мнимыми величинами – это равенство двух функций друг другу, обычно проводят вычисления однозначно (более единообразно) таким способом, чтобы преобразовать первый член равенства и второй к виду $f(x, y,...)=0$. Мы будем называть первым элементом уравнения функцию f, которая осуществляет это преобразование.

20. Рациональные функции – это такие, вычисления которых производятся с помощью элементарных операций над независимыми переменными: сложения, вычитания, умножения (возведения в степень), деления, повторённые некое количество раз в произвольном порядке [13, с. 16].

21. Утверждения, сделанные в n^0 3 (IV) и 5 сохраняются в следующем виде:

Рациональная функция от сходящейся варианты (знаменатель которой не является бесконечно малым) будет также сходящейся вариантой, которая эквивалентна такой, какая получится при замене представленной варианты на эквивалентную ей.

Или же, говоря другими словами, (фигурально выражаясь, если пределы неизмеримы):

Рациональная функция от варианты, имеющей предел, в пределе есть результат подстановки предела независимой переменной в допущении, что она сходится. При этом мы всегда полагаем, что знаменатель не стремится к нулю.

22. Нерациональные функции всегда представляются как пределы рациональных функций, содержащих в себе обобщение множества целых бесконечно больших. Они сводятся ко всем однозначным более значительным типам, а именно к *целым* рядам (рядам по целым степеням), о которых мы говорим почти исключительно как о последовательностях [13, с. 17–18].

Часть вторая. Обобщение рядов [13, с. 18].

Часть третья. Степенные ряды возрастающих степеней многих переменных [13, с.30].

Непрерывность

40. Пусть $f(x, y, \dots)$ – сумма целых рядов, R_x, R_y,... – их области (круги) сходимости, R_x°, R_y°,... – соответственно меньшие положительные

величины. x', y',…, x, y,… – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках O_x, O_y,... т. е. центры областей $R_x{}^\circ$, $R_y{}^\circ$,..., так, что все разности $x' - x$, $y' - y$,… будут бесконечно малыми, тогда разность $f(x', y', ...) - f(x, y, ...)$ стремится к нулю.

Действительно, $x' = x + h, y' = y + k, ...$; назовём $R'_x, R'_y, ..., R''_x, R''_y, ...$ такие положительные величины, которые удовлетворяют следующим неравенствам[45]:

$R'_x < R^\circ{}_x < R''_x < R_x$; $R'_y < R_y{}^\circ < R''_y < R_y$;...;

Обозначим[46] также $\rho^\circ{}_h, \rho^\circ{}_k, ..., \rho''_h, \rho''_k, ..., \rho_h^{IV}, \rho_k^{IV}, ...$ соответственно положительные величины, удовлетворяющие неравенствам: $\rho'_h < \rho_h{}^\circ < \rho''_h < R_x - R''_x$; $\rho'_k < \rho_k < \rho''_k < R_y - R''_y$, …

Выделим, когда модули $x' - x, y' - y, ...$, т. е. h, k, … становятся меньше, чем $\rho''_h, \rho''_k, ...$. Тогда $f(x + h, y + k, ...)$ будет зависеть от целочисленного ряда x, y, …, k, h, …, который сходится в области сходимости $R''_x, R''_y, ..., \rho''_h, \rho''_k, ...$ (см. выше). Поэтому имеем $R''_x + \rho''_h < R_x$; $R''_y + \rho''_k < R_y$; … Члены этого ряда, независимые от h, k, …, образуют новый ряд, сумма которого в точности воспроизводит f $(x, y, …)$; все остальные непрерывны как произведения некоторых степеней или их величин. И наконец, напишем $f(x', y', ...) - f(x, y, ...) = h\omega_h + k\omega_k + ...$, где $\omega_h, \omega_k, ...$ обозначают целые ряды от x, y, …, k, h, …, с той же областью сходимости, что и прежние (выше, 4^0), то есть, иными словами, $R''_x, R''_y, ..., \rho''_h, \rho''_k, ...$, или представимые[47] как $r_h, r_k, ...$ для модулей h, k, …: $\mathrm{mod}[f(x', y', ...) - f(x, y, ...)] < r_h \cdot \mathrm{mod}\,\omega_h + r_k \cdot \mathrm{mod}\,\omega_k + ...$

Таким образом, как только $r_h, r_k, ...$ не превосходят $\rho'_h, \rho'_k, ...$, имеем в силу того, что модули x, y, … всегда меньше или равны чем $R'_x, R'_y, ...$

$$\mathrm{mod}\,\omega_h < \frac{A_h}{\left(1 - \frac{R'_x}{R_x^0}\right) \cdot \left(1 - \frac{R'_y}{R_y}\right) ... \left(1 - \frac{\rho'_h}{\rho_h^0}\right)\left(1 - \frac{\rho'_k}{\rho_k^0}\right) ...}$$

$$\mathrm{mod}\,\omega_k < \frac{A_k}{\left(1 - \frac{R'_x}{R_x^0}\right) ... \left(1 - \frac{\rho'_h}{\rho_h^0}\right) ...}$$

где A_h, A_k,... обозначают верхние пределы модулей общих членов рядов ω_h, ω_k,... для модулей $R_x^0, R_y^0, ..., \rho_h^0, \rho_k^0 ...$, соответствующих x, y, …,

---

[45] Дальше, возможно, опечатка в тексте.

[46] В тексте количество штрихов неразборчиво.

[47] Все индексы плохо разборчивы.

h, k, … (выше, 30). Следовательно, можно представить M_h, M_k,..., для вторых членов последнего неравенства получим более сильное обоснование: $\mathrm{mod}\left[f(x', y', ...) - f(x, y, ...)\right] < M_h\, r_h + M_k\, r_k + ...$, где, для h, k, … бесконечно малых: $\lim\left[f(x', y', ...) - f(x, y, ...)\right] = 0$.

41. Принимая это во внимание, мы получаем следующее утверждение, эквивалентное предыдущему:

Если в сумме N первых элементов целого (по целым степеням) ряда, заменим варианты на сходящиеся варианты (18), *которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, то так мы достигнем сходимости вариант и их эквивалентности друг другу, причем N есть индекс замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящихся к каким-либо значениям.*

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных (см. выше). Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

42. *Если x', y',… соответственно стремятся к данным пределам x, y, ..., расположенным во внутренней части круга сходимости, $f(x', y', …)$ стремится к $f(x, y, …)$.*

Это непосредственно следует из утверждения (40). Иными словами, *сумма целочисленного ряда есть непрерывная функция независимых переменных от пределов, к которым они сходятся.*

В частности, если x, y, … сходятся к нулю, то сумма ряда, сходится к пределу первого элемента, $a_{0,0,...}$, ибо $a_{0,0,...}$ есть значение, которое получается при $x = y = 0$ [13, с. 38].

Часть четвёртая. Олотропные функции. Классификация их производных. Основное свойство

Определения

Будем говорить, что функция $f(x, y, …)$ олотропна (olotrope) на порциях S_x, S_y,... вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных x, y, …, ограниченных этими областями, $f(x + h, y + k, …)$ представляет собой ряд по целым степеням, а h, k, … таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие δ_x, δ_y,..., все не равные нулю.

Назовём δ_x, δ_y,... *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f(x, y, \ldots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x - x_0$, $y - y_0$, ..., где x_0, y_0, ... обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области такие, что для соседних точек $x, y, \ldots$, модули их разностей остаются внутри ололметров. Таким образом, получается, что вместо $x - x_0$, $y - y_0$, ... можно писать $h, k, \ldots f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$.

46. *Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера* [13, с. 45].

Основное свойство

Если $f(x, y, \ldots)$ есть олотропная функция в областях S_x, S_y,..., то можно утверждать, что на всём пространстве между этими пределами можно найти такую положительную величину M, что значение функции по модулю будет меньше M [13, с. 57].

66. Почти одно и то же будет, когда для высказанного утверждения разность $f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)$ будет бесконечно малой при $x' - x$, $y' - y$, ... при этом x', y', ..., x, y, ... любые из областей S_x, S_y,... [13, с. 58].

67. *Таким образом, для неизменяемых величин x, y, ... получится* $\lim f(x', y', \ldots) = f(x, y, \ldots)$; *или, другими словами, приращение олотропной функции, соответствующее бесконечно малому приращению переменных, само будет бесконечно малым.*

Олотропные функции в то же время являются непрерывными в обычном значении этого слова, но высказанное в предыдущем пункте заключает в себе несколько большее.

68. Если $f(x, y, \ldots)$ есть олотропная функция в областях S_x, S_y,..., и если какой бы малой ни была положительная величина ω, то найдутся значения переменных, при которых достигается, что модуль этой функции меньше ω, необходимо существует для этой области по крайней мере одна система значений $x, y, \ldots$, удовлетворяющих уравнению $f(x, y, \ldots) = 0$.

Часть пятая. Пределы сходимости, зависящие от олотропных функций. Формирование функций для продолжения.

Рассмотрено существование и свойства корня двучленного уравнения [13, с. 66].

87. *Если функция f (x, y, ...) есть олотропная функция в областях* S_x, S_y,..., *то будет сходиться её продолжение* $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$, *где* x_0, y_0,... *находятся внутри* S_x, S_y,..., *когда модули h, k, ... на равном или*

меньшем расстоянии Δ_x, Δ_y,... *от* x_0, y_0,... *в контуре тех областей, в которых они определены*.

Действительно, в силу предыдущей теоремы, успешно продолжим пределы сходимости: δ_x, δ_y,... – области олотропности в $2\delta_x$, δ_y,... (*так в оригинале* – Г. С.), затем в $3\delta_x$, δ_y,... и т. д., затем в Δ_x, δ_y,... (*так в оригинале* !), потом в Δ_x, Δ_y,... и так далее до последовательности последней варианты.

Заметим, что теорема 86, из которой не следует частная форма, представляет собой простейшее обратное предложение следующей теоремы 88. Тип тех условий, с помощью которых это будет доказано, не только достаточен, но и необходим. Таков, например, ряд (2) из п. 6. Он не только постоянно сходится к пределам $x, y, ..., \xi, \eta, ...$ и значение, несомненно $f[(x+\xi),(y+\eta),...]$ не будет превышено, ибо будет сходиться как обусловленное первым (38).

Теория, зависящая от настоящего параграфа, основана на пределах сходимости рядов Тейлора и Маклорена, таким образом, можно быть уверенным в получении формулы, не расширяя её [13, с. 91].

Вычисление функций с помощью расширения. Однозначные (монодромные) функции

Когда расширение ограничено, в этом случае крайние значения X, Y,... совпадают с исходными x_0, y_0,..., *функция вновь принимает первоначальные значения, если она локально олотропна в областях, создаваемых контурами*. [13, с. 97].

Часть шестая. Сложные функции [13, с. 98].

Определения. Основные свойства

95. 1^0. *Инверсия (обратная, в смысле минус первой степени) олотропной функции олотропна, пока (до тех пор) эта функция не исчезает*.

2^0. *Отношение двух олотропных функций есть олотропная функция, если знаменатель не обращается в ноль*.

3^0. *Рациональная функция олотропна для всех значений переменных, если они не обращаются в ноль в знаменателе*.

4^0. *Рациональная функция от олотропной функции обладает тем же свойством, если знаменатель не обращается в нуль* [13, с. 101].

Производная сложной функции

Приложение формулы Тейлора к рациональным функциям [13, с. 106]

Способы исследования функций [13, с. 111]

Возрастание и убывание действительных функций

Олотропная функция возрастает или убывает, если первая производная не обращается в ноль, а соответственно положительна или отрицательна [13, с. 112].

***Особый случай, когда уравнение обязательно имеет несколько рациональных корней* [13, с. 113]**

105. *Если между действительными числами* $a < b$ *функция* $f(x)$ *остаётся олотропной и действительной и если* $f(a)$, $f(b)$ *имеют разные знаки, то уравнение* $f(x) = 0$ *имеет между a и b хотя бы один действительный корень*[48].

В этих же условиях если $f(a) = f(b) = 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет между a и b хотя бы один действительный корень[49] [13, с. 106].

Максимум и минимум действительных функций [13, с. 116]

Часть восьмая. Различные теоремы об олотропных и квази-олотропных функциях одной переменной [13, с. 119].

Нули олотропной функции.

Бесконечные значения квази-олотропной функции [13, с. 122].

113. Назовём функцию $f\ (x)$ квази-олотропной в области S, если в точках этой области, где функция олотропна, её обратная $\frac{1}{f(x)}$ теряет это свойство в особых свойственных олометрах, меньших либо равных данной величине δ. Такова, например, простая дробная функция $\frac{1}{x}$ для $x = 0$. Эта функция подобна любой рациональной дроби, и будет олотропна вместе с целой функцией.

Фазы сингулярности (периоды единственности) функции одной переменной [13, с. 126].

Функции бесконечно олотропные или менее квази-олотропные [13, с. 129].

123. Функция $f(x)$, которая сохраняет олотропность на всей плоскости графического представления x, и не обращается в константу, будет наверняка бесконечной для некоторых значений x. (Мере доказывает это утверждение с помощью ряда Маклорена).

---

[48] Эту теорему впервые сформулировал Мишель Ролль, сейчас она носит имя Больцано–Коши. Мере доказывает её так же,как это делал Коши, с помощью нескольких различных δ, но без ε.

[49] Это теорема Ролля. Мере, возможно, был первым, кто доказал её, используя формулу Лагранжа.

124. В этих же условиях функция $f(x)$, имеет хотя бы один ноль или бесконечно мала для всякого бесконечного значения x [13, с. 129].

Ряды простых дробей [13, с. 132].

Часть девятая. Основные принципы интегрального исчисления [13, с. 138].

Часть десятая. Теория неявных функций [13, с. 154].

Часть одиннадцатая. Изучение некоторых неявных функций одной переменной, определённых одним уравнением [13, с. 175].

Часть двенадцатая. Аналитическая теория показательных и однородных функций [13, с.205].

Круговые (периодические) функции[50] [13, с. 210].

Часть тринадцатая. Продолжение предшествующей главы. Обратные функции. |Неперовы логарифмы| [13, с. 221].

Аркфункции [13, с. 233].

Теорема Коши [13, с. 241].

Часть четырнадцатая. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия [13, с. 243].

Часть пятнадцатая. Продолжение предшествующей. Основные понятия [13, с. 263].

Часть шестнадцатая. Уравнения в полных дифференциалах [13, с. 270].

Часть семнадцатая. Простые интегралы [13, с. 277].

«Новый курс анализа бесконечно малых» Шарля Мере, изданный в 1872 году, позволяет нам увидеть изменение структуры анализа со времён Коши, расширение материала, новые способы доказательства. В частности, заметим, что теорема Ролля из вспомогательных теорем для решения уравнений у Коши уже перешла в основные теоремы в курсе Мере. Понятие олотропной функции, аналогичное понятию равномерно непрерывной функции, к сожалению, не получило развития у других авторов. Позже мы увидим дальнейшее развитие структуры курса анализа у Вейерштрасса и Дини.

Литература к VII главе

1. *Гейне Э.* Элементы учения о функциях / Э. Гейне. / пер. с нем., примечания Г. И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексные программы: межвузовский тематический сборник трудов. Под

---

[50] Мере вводит синус и косинус через формулу Эйлера.

редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б. Г. Вагера. – СПб.: СПбГАСУ; 2012. – 18. – С. 26–46.

2. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. / пер. с нем. С. О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4-е изд. – 44 с.

3. *Дюгак П.* Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса / П. Дюгак // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С. 176–180.

4. *Кантор Г.* Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов / Г. Кантор // Труды по теории множеств. – М.; 1985. – С. 9 – 17.

5. *Коши О.* Алгебрический анализ / пер. с французского Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина / О. Коши. – Lepzig: Druck von Bär & Hermann. – 1864. – 252 с.

6. *Cauchy A.-L.* Course d’Analyse de l’Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. – Ser. 2. – T. 3. – P. 1–471.

7. *Dugac P.* Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite / P. Dugak // Revue d’histoire des sciences et de leurs applications. – 1970. – T. 23. – n°4. – P. 333–350.

8. *Dugac P.* Elements d`analyse de Karl Weierstrass / P. Dugac // Archive for History of Exact Sciences. – Paris, 1972. – 10. – P. 41–176.

9. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math, 1872. – 74. – S. 172–188.

10. *Kossak E.* Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried. / E. Kossak // Werder. Gymn. – Berlin, 1872.

11. *Laurent H.* Ch. Méray. Nouveau précis d’analyse infinitésimale / H. Laurent // Bulletin des Sciences Mathématiques, 1873. – 4. – P. 24–28.

12. *Méray, Ch.* Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat. – 1869. – (2). – 4. – P. 280–289.

13. *Méray, Ch.* Nouveau précis d’analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication: F. Savy. XXIII. – Paris, 1872. – 310 p.

14. *Méray, Ch.* Considérations sur l’enseignement des mathématiques / Ch. Meray. – [Darantière] ([Dijon]), 1892. – 52 p.

15. *Méray, Ch.* Leçons nouvelles sur l’analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Principes généraux / Ch. Méray. – Paris, Gauthier-Villars et fils. – 1 vol., 1894–1898.

16. *Pionchon, J.* Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray // J. Pionchon // Revue bourguignone d’Enseignement Supérieur, 1912. – 22. – P. 1–158.

17. *Roque T.* Les définitions les plus rigoureuses sont-elles plus faciles à comprendre ? Charles Méray et la proposition d’une définition « naturelle » des nombres irrationnels / T. Roque. – Universidade Federal do Rio de Janeiro. – Электронный ресурс: https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:M_XHOIq-lT0J:www.edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6/PdfFiles/6-04-Roque.pdf+LES+D%C3%89FINITIONS+LES+PLUS+RIGOUREUSES+SONT-ELLES+PLUS+FA-

CILES+%C3%80+COMPRENDRE+?+Charles+M%C3%A9ray+et+la+proposition+d%E2%80%99une+d%C3%A9finition+%C2%AB+naturelle+%C2%BB+des+nombres+irrationnels+Tatiana+ROQUE+Universidade+Federal+do+Rio+de+Janeiro&hl=ru&gl=ru&pid=bl&srcid=ADGEESibLOQS4DwT-FRO8LZ2pT-RURu5s2O6fOQ2XAzxeveCB7PIrC9lfdiz02Ee4rl9SXU_csvvIIaI-HIXrOhxQq1F5PEMDof99jumFI0b2oQZf--V_ELTh2wxYNHq_6SPmluy_c36hQ&sig=AHIEtbSVhM-sJquEPe48C1HY_8OUxb0kCg

18. *Tannery, J.* Méray Ch. « Leçons nouvelles sur l’analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie : Principes généraux » / J. Tannery // Bulletin des Sciences Mathématiques, 1894. – (2)18. – P. 80–90.

Глава VIII. ОСОБЕННОСТИ НЕМЕЦКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ЭПОХИ ВЕЙЕРШТРАССА. КОНЦЕПЦИИ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА У НЕМЕЦКИХ МАТЕМАТИКОВ. НОВЫЙ ТИП ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Эпоха Вейерштрасса

Риман где-то сказал, что французская математика – это математика вычислительная, в то время как немецкая математика – умозрительная и концептуальная. Военизированная подготовка государственных служащих, инженеров и артиллеристов во французских учебных заведениях сильно отличалась от провинциальной подготовки немецких университетов. Но реформа образования, начатая в первые десятилетия XIX века Вильгельмом фон Гумбольдтом, начала приносить свои плоды. Недаром Бисмарк после победы во франко-прусской войне сказал, что Францию победил школьный учитель. В математике Германии прикладное направление развивалось наряду с обще-теоретическим, концептуальным. Объединение Германии в 1871 году дало стимул развития науки. Все социальные высказывания немецких математиков того времени (Ганкеля, Вейерштрасса) наполнены патриотизмом и энтузиазмом. Отсюда смелость в обращении к общим исследованиям. Ярким примером тому является Георг Кантор. Он считал прикладные науки второстепенными, для математики основную задачу определив как искусство не отвечать на вопросы, а как искусство ставить вопросы. Теория множеств, направленная сначала на теоретическое обоснование арифметики, сначала развивалась как теория точечных областей, но затем приобрела характер самостоятельной теории и стала фундаментом современной математики. Теория Кантора была настолько общей, что дала возможность формировать новые понятия, обусловленные внутренней логикой математики, её языка. Кантор был студентом Вейерштрасса, который читал лекции, показывая студентам математику как поле нерешённых проблем. Из школы Вейерштрасса вышло много крупных математиков, среди которых Э. Гуссерль, В. Киллинг, С. Ковалевская, М. Лерх, Г. Миттаг-Леффлёр, К. Рунге, Ф. Фробениус, Л. Фукс, Г. Шварц, А. Шёнфлис. Идеи и педагогические методы Вейерштрасса распространялись по европейским странам благодаря обучавшимся у него иностранным студентам.

Рис. 1. Карл Вейерштрасс

Карл Вейерштрасс преподавал в Берлинском университете с 1856 года и создал сильную школу теории функций. Вейерштрасс не публиковал свои курсы лекций, не разрешал литографировать студенческие записи. Сейчас мы располагаем немногими записями таких лекций. Способ преподавания, устная передача идей своим ученикам постепенно создали огромную сферу влияния идей Вейерштрасса в Германии и за её пределами. Начинал Вейерштрасс как школьный учитель, ему приходилось вести занятия в провинциальных школах, где ученики были скромно одарёнными. Нужно было понятно объяснять, заинтересовывать и мотивировать школьников. Манера преподавания Вейерштрасса была слабо формализована, носила характер доверительной беседы. Значительная часть курса посвящалась введению на основе примеров (около 10 лекций), далее он постепенно переходил к более абстрактным понятиям и строгим определениям, всегда обращая внимание слушателей на проблемы. Именно под его влиянием Кантор в своей диссертации написал, что «Математика это не искусство решать задачи, а искусство ставить вопросы». Э. Гейне признавался, что написал свои «Лекции по теории функций» под влиянием Вейерштрасса. Не напрасно Вейерштрасс интересовался педагогическим методом Сократа, и даже написал статью об этом методе. Вейерштрасс читал лекции многолетними циклами, начиная с теории действительного числа и постепенно переходя к специальным вопросам. Правда, если на первых лекциях аудитория была многочисленна, к последнему году оставалось несколько человек. Но это были уже зрелые исследователи. Около сотни крупных математиков считали себя учениками Вейерштрасса.

Академик А. Н. Крылов, в переводе которого в 1918 году на русском языке была опубликована речь Вейерштрасса[51] при вступлении в должность ректора Берлинского университета [1, с. 1325], писал в предисловии: «После войны 1870–1871 года появилась поговорка, что Францию победил германский школьный учитель; теперешняя война показывает, что с тех пор сделал германский профессор. Германия, достигнув после французской войны единства, и первенствующего положения в сонме держав, поняла, что необходимо непрестанное усилие, непрестанная забота, чтобы его удержать. Она рано увидела, что незыблемой основой её могущества может быть лишь широкое развитие и правильно поставленная промышленность; основу же такой постановки промышленности она видела в широком распространении технических знаний, в свою очередь, имеющих своим прочным основанием общую науку, из которой они почерпнут методы и начала своего развития.

Без правильной постановки высшей школы широкое развитие науки невозможно. В своей речи великий учёный [Вейерштрасс] в образных, глубоко продуманных словах излагает преемственно выработанный германскими мыслителями взгляд на надлежащую постановку высшей школы, а вместе с ней и средней, которую высшая школа должна поднимать к своему уровню, а не принижаться к ней в угоду числу и ущерб качеству» [1, с. 1325].

---

[51] Приношу благодарность Ю. С. Налбандян, доценту ЮФУ, за предоставленный материал.

В своей речи Вейерштрасс говорит: «Успех академического преподавания основывается по большей части на том, что учитель непрестанно направляет учащегося к самостоятельным изысканиям. Но это достигается не какими-нибудь наставлениями, а прежде всего и главным образом тем, что учитель при изложении предмета самим расположением материала и выставлением руководящих идей показывает учащемуся тот путь, следуя которому зрелый и владеющий уже всеми исследованиями мыслитель доходит в правильной постепенности до новых результатов или до лучшего обоснования уже известных. Учитель не упускает при этом случая указать те границы, которые наука ещё не переступила, а также упомянуть те пункты, исходя из которых, возможно в ближайшем будущем ожидать дальнейшего развития науки. Он не отказывает также ученику в посвящении в ход собственных исследований, не скрывая при этом даже и сделанных промахов и испытанных разочарований. Правда, таким образом, получаются не столь красочные, изящные и для умственно косных слушателей более понятные лекции (подобные, например, тем, которые излагаются большинством французских профессоров по вполне обработанным согласно установленной программе литографированным запискам, иногда даже поручаемым их ассистентам для прочтения). Во всяком случае, если из таких лекций и возможно получить больше познаний, то первые доставляют большее развитие…

В старинных мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество научного материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному…

Стремление к исследованию отвечает заложенной в самую внутреннюю сущность человека потребности подмечать в последовательном и совместном существовании вещей порядок и закономерную связь. Отдельные научные дисциплины получают своё значение потому, что они все содействуют этой цели, но не бессвязно, а образуя как бы одну цепь, которая, начинаясь с математики, как крайнего звена, протягивается через различные отрасли естественных и исторических наук, в широком смысле этого слова, к философии, как другому крайнему звену. Математика и естественная наука занимаются проявлениями формы бытия в пространстве и во времени; первая – идеальными существующими лишь в мыслях и лишь вообще возможными, вторая – осуществлёнными на деле в вещественном мире. Таким образом, математика является необходимой предпосылкой естественных наук, а не вспомогательной дисциплиной в обычном смысле; обратно, естествоиспытатель, производя опыты и наблюдения, в получаемых им результатах доставляет математику нечто гораздо большее, нежели простое собрание задач» [1, с. 1327].

Ученики Вейерштрасса, – Шварц, Коссак, Ганкель, Пинкерле, став профессорами, читали свои лекции по лекциям своего учителя.

Концепция числа К. Вейерштрасса и её отличие от концепций современников – Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора и Р. Дедекинда

А. Г. Кёстнер (Kaestner, 1719–1800) ещё до О. Коши рассматривал иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей [2, с. 198]. Так же рассматривал иррациональные числа и Коши в своём курсе анализа [3], хотя не определял операций над ними.

В 1830-е годы над построением концепции числа работал Больцано, его построения во многом предвосхищают концепции Кантора и Дедекинда [17].

В 1870-е годы в математике произошло удивительное явление – сразу четыре математика сформулировали концепцию действительного числа и непрерывности. Открытие рядов Фурье требовало анализа множеств точек разрыва. Реформы математического анализа, произведённые О. Коши и К. Вейерштрассом, показали необходимость арифметизации континуума.

В 1869 и 1872 годах французский математик Шарль Мере (Charles Méray, 1835–1911), в статье [4] и в курсе анализа [5] ввёл свою концепцию действительного числа как предела последовательностей Коши рациональных чисел: «инварианта сходится к некоему фиктивному неизмеримому пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение» (теорема 5). Он ввёл отношение порядка, замкнутость относительно арифметических операций. К сожалению, соотечественники не оценили его работы, а франко-прусская война не позволила ознакомиться с его результатами немецким математикам.

Георг Кантор (G. Cantor, 1845–1918) в 1870-х годах начал создавать теорию множеств. С 1872 года Кантор рассматривает соотношение точек на континууме [6]. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным. Кантор вводит понятие фундаментальной последовательности, предельной точки, производного множества. Этот конструкт был плодотворным, многие математики, например, Г. Шварц, У. Дини, стали использовать его в курсах анализа. Основополагающим для определения числа Кантор сделал понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами. Отличительной особенностью концепции Кантора была иерархия производных множеств, а впоследствии сравнение их по мощности, что позволило ему создать целостную теорию.

Эдвард Гейне (E. H. Heine, 1821–1881) работал в университете Галле. После Вейерштрасса Гейне стал вторым наставником Кантора в науке. Гейне пригласил Кантора в университет Галле, в котором Кантор и проработал всю свою жизнь. Именно благодаря Гейне интересы Кантора обратились к точечным множествам. В 1872 году Гейне с позиций преподавателя изложил свою концепцию действительного числа (числа вообще). В ней использовалось понятие фундаментальной последовательности и предельной точки. По признанию самого Гейне, эти понятия обсуждались им с Кантором и Вейерштрассом [7]. В этой работе содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора – Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне – Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году для счётного числа покрытий). Эта теорема у Гейне имела вспомогательный характер для конечного числа покрытий. Подход Гейне к определению предела функции через предел фундаментальной подпоследовательности стал широко применяться в преподавании математического анализа. Помимо этого в «Лекциях» Гейне впервые сформулирован принцип пренебрежения некоторым множеством точек, то есть степень общности утверждения.

Рихард Дедекинд (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831–1916) в 1872 году опубликовал свою концепцию действительного числа с использованием понятия сечения как для чисел, так и для точек на прямой [8]. Особенностью определения Дедекинда был алгебраический подход к числу. Ученик Гаусса и Дирихле, Дедекинд создал теорию идеалов и аксиоматику арифметики. Его понимание числа тесно связано с понятием непрерывности числовой и геометрической прямой, и мы рассмотрим его подробнее в соответствующей главе. Работы Дедекинда легли в основу фундамента общей алгебры, его определение числа формально безупречно.

Георг Кантор, в те годы собеседник и корреспондент Дедекинда, в 1882 году написал Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт – счётные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) – кажутся годящимися для этой попытки» [9]. О преимуществах и недостатках концепции Дедекинда Кантор написал позже, в 1883 году: «каждому числу b соответствует лишь единственное сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе никогда не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом» (Кантор Г. «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» § 9) [9, с. 84].

Карл Вейерштрасс в лекциях последних лет сделал попытку критически обобщить результаты коллег. У него с самого начала была своя концепция числа как агрегата[52], отличная от концепций предыдущих авторов. Агрегат представлял собой множество, конечное или обозримое[53], с помощью которого число представлялось как разложение по степеням произвольно выбранной основной единицы. Как правило, это десятичное представление вида $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+....$ Рассмотрим фрагмент его лекций 1878 года о свойствах чисел:

«Правила сложения: согласно этому определению можем вывести следующие теоремы относительно сложения:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = (a + c) + b$.

Из двух этих правил следует, что сумма произвольного количества чисел не зависит от того, в каком порядке осуществляется сложение. Имеем

$[(a + b + c + d) + e] + f = [(a + b + c + d) + f] + e.$

Согласно пункту 2 –

$(a + b + c) + d + e + f = (a +b + d) + c + e + f;$

---

[52] Термин впервые встречается у Ньютона.

[53] Термин Вейерштрасса.

$a + b + c + d + e + f = b + a + c + d + e + f$ согласно пункту 1.

Затем можно в сумме переставить две очерёдности чисел. Сначала в очерёдности представленной соседними числами можно каждое число представить как сумму меньших чисел (..).

Умножение. До введения правил умножения числовых величин нужно сначала убедиться, что для двух произвольных вычислимых чисел a и b число, обозначенное ab, допускает определение операции, которая подчиняется следующим правилам:

I) $ab = ba$;

II) $(ab)c = (ac)b$;

III) $a(b + c) = ab + ac$.

Из III) и I) легко получается, что III)′ $(a+b+c+...)(a'+b'+c'+...)=$ $= aa'+ab'+ac'+...+ba'+bb'+bc'+...+ca'+cb'+cc'+...(\ldots)$» [10, с. 380].

Вейерштрасс формально определяет числовые величины как символы вида $a + b + c + \ldots$, где a, b, c,… есть положительные измеримые числа. Перейдём к конструкции агрегатов. Если ненулевые слагаемые a, b, c,… бесконечно велики, а выражение $a + b + c + \ldots$ понимаем как ряд, то условие III)′ не следует из условий I) и II); его доказательство требует знакомства с тем фактом, который приписывается Вейерштрассу: если ряд абсолютно сходится, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. Условие III)′ можно интерпретировать как частный случай этого утверждения.

Первый цикл лекций, посвящённый неизмеримым числам, Вейерштрасс читал в 1861/62 учебном году. Понятию неизмеримого числа и различным конструкциям этих чисел посвящены первые часы его лекций по математическому анализу, в течение многих лет читаемых в Берлине. Например, в лекциях 1886 года (9 июня) он говорил о неизмеримых числах так:

«В произвольной близости от каждого неизмеримого числа существует произвольно много числовых величин, которые приближаются к нему произвольно близко. Следовательно, каждая неизмеримая числовая величина есть граница измеримых [числовых величин], в этом случае [раньше] определённых. Каким же тогда должен быть способ чисто арифметического определения различия между измеримыми и неизмеримыми? Если принять существование измеримых числовых величин, то нет никакого смысла, чтобы [числа] неизмеримые определять как точные границы, так как это заранее вовсе неизвестно, разве что за исключением измеримых и ещё некоторых числовых величин».

Это отчётливый упрёк по адресу конструкции действительных чисел Мере – Гейне – Кантора, хотя во время лекции он и не называл имён. Далее во время этой лекции Вейерштрасс аргументировал:

«Но числовая величина, которая раньше была определённой, по правде понималась как измеримое число, но и также содержит в себе и другие. Рассмотрим, например, число e, которое представлено упорядоченными элементами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots., \frac{1}{n!}, \ldots,$ образующими хорошо определённый ряд. Этот ряд однозначно определяет числовую величину, которая ему равна; можно сказать, что не существует измеримой числовой величины, равной представленной числовой величине [так называемому числу e]. Отсюда сразу делаем вывод, что область [всех] величин не исчерпывается измеримыми числами» [10, с. 381–382].

На лекции 11 июня 1886 года Вейерштрасс продолжал свои рассуждения так:

«Пользуясь тем, что с помощью введённого наглядного метода легко удаётся доказать, что каждая числовая величина соответствует некоторой определённой геометрической длине, можно представить числовую величину в некоторой арифметической форме, например, в десятичной системе в виде $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots$, где $0 \leq a_k \leq 10$, где $k \geq 1$, то есть мы можем все наши [положительные] числовые величины представить как отрезки [длины]» [11]. Проблеме соответствия числа, числовой величины, точки и места на прямой, посвящены исследования Гейне, Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса. Все они глубоко чувствовали внутреннюю связь числа и непрерывности, и стремились выразить её в своих определениях. Позже мы рассмотрим это подробнее.

Карл Вейерштрасс не публиковал и не разрешал литографировать свои лекции. Он читал их, начиная с 1856 года, конспекты некоторых студентов всё же попадали в печать. В 1872 году вышла книга Коссака, содержавшая изложение концепции числа по Вейерштрассу [12].

В летнем семестре 1886 года в ответ на упрёки Л. Кронекера в недостаточной обоснованности лекций по теории аналитических функций Вейерштрасс прочитал дополнительные главы, посвящённые основаниям теории функций [11]. К этому времени уже появились концепции числа Кантора, Гейне и Дедекинда. Вейерштрасс делает попытку обобщить их и привести в согласование с классическим представлением о числе как о пропорции.

Вейерштрасс отмечает неполноту поля рациональных чисел, рассматривает разницу между понятиями числа и числовой величины. Число у него это агрегат[54], конечная совокупность, например в виде десятичной или иной записи относительно условно выбранной единицы. Каждому числу соответствует точка на прямой, но не очевидно, что каждой точке соответствует число[55]. В отличие от вышеназванных авторов, он определяет действительное число как предел частичных сумм абсолютно сходящегося ряда, обращая внимание на необходимость арифметизации понятия предела. Вводит упорядоченность, замкнутость относительно арифметических операций. Вводит понятие комплексного числа.

Кантор строил целостную теорию точечных множеств, полагая прикладные вопросы вторичными. Его теория точечных множеств, задуманная как обобщение современного математического анализа, спустя годы стала основанием, фундаментом математики. Дедекинд создавал арифметическое понятие числа как алгебраист, не склоняясь к проблемам математического анализа. Его построение спустя 15 лет привело к созданию аксиоматики арифметики. Гейне преследовал педагогические цели, его изложение предела и непрерывности через фундаментальные последовательности вошло в современные курсы анализа.

В отличие от них Вейерштрасс создавал своё обоснование для теории аналитических функций. Те понятия, которые он вводит, не носят глобального характера, но необходимы лишь для его построений. Он вводит собственные понятия континуума и связности, которые отличаются от таковых же понятий у Кантора; для аналитического продолжения по пути строит цепочку открытых дисков, что эквивалентно лемме Гейне о покрытиях. Число у Вейерштрасса определено так, чтобы было достаточно определить непрерывное изменение арифметических величин в их взаимной зависимости, «то есть осуществляется вычисление арифметического выражения, выполненное так подробно, что для любого требования к точности для любой величины t функция может быть представлена с любым приближением. Для строго определённой непрерывной функции также всегда можно найти математическое выражение» [11, с. 21]. При этом, если функция представлена в виде ряда, то это не сужает, а расширяет

---

[54] Этот термин применительно к числу впервые встречается у Ньютона.

[55] Кантор вводит это утверждение как аксиому, утверждая, что доказать это невозможно. Дедекинд полагает, что числа – это объекты «мира наших мыслей» и наше право полагать их связанными с точками.

возможности исследования этой функции, но ряд должен обладать равномерной сходимостью. «Для любого значения *x*, для которого функция определена, она действительно представима» [11, с. 36].

Изменение типа математических определений

После того как Кантор создал теорию множеств, изменился язык и внутренняя структура математики. Она перестала нуждаться в геометрической или физической интерпретации, и приобрела значительную дескриптивную составляющую. Созидающим инструментом становится язык, описательные формы. Теория множеств создавалась как продолжение арифметики, но уже десятилетие спустя стала основой, базой теории числа. Появилась возможность анализировать тончайшие нюансы конструкций математических объектов и связей между ними. Многие определения и утверждения формировались вербально, сохраняя высокую степень абстракции. Это привело к дискуссиям среди математиков, многие из которых носили лингвистический характер.

Кантор начинает построение своей теории с определения количества, и на его основании вводит понятие мощности. В 1883 в «Основах общего учения о многообразиях» Кантор пишет: « ... хотел бы вкратце и построже сказать о трёх известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это прежде всего способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях проф. Вейерштрасс. Во-вторых, г-н Дедекинд в своём сочинении «Stetigkeit und irrational Zahlen» (Braunschweig, 1872) опубликовал своеобразную форму определения. В-третьих, в 1871 г. я предложил (Math. Ann. 1872, Bd. 5. S. 123) форму определения, внешне имеющую известное сходство с Вейерштрассовской, так что г-н Вебер смешал её с последней. Эта форма … является самой простой и естественной из всех и имеет ещё то преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений. .. Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа» [2, с. 81–82]. И далее «Процесс правильного образования понятий, по-моему, повсюду один и тот же: берут некоторую лишённую свойств вещь, которая первоначально есть не что иное как имя или знак *A*, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяется отношение *A* к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия *A*, и оно появляется на свет, снабжённое такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики» [9, с. 103–104].

Как пример определения Кантора: «Под множеством мы понимаем соединённое в некоторое целое *M* определённых хорошо различимых предметов *m* нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества *M*. «Мощностью» или «кардинальным числом» множества *M* мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из *M*, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов *m* и от порядка их задания» [9, с.173].

После возникновения теории множеств в математике повысилась роль индуктивных определений невербального характера, т. е. предполагающих выполнение абстрактных математических операций, уже не связанных с приложениями в физике, механике, геометрии. Наряду с этим, появляются и непредикативные определения. Видимо, впервые на них обратил внимание А. Пуанкаре. По его словам, это определения, основанные на принципе порочного круга, petitio principii, или предвосхищения основания.

Пуанкаре говорил об определении числа в 1905 году: «Невозможно дать определение, не употребив грамматического предложения, и трудно произнести предложение, не вставив в него название числа, или, по крайней мере, слово «несколько», или не употребив слова во множественном числе. А тогда становишься на скользкий путь и ежеминутно рискуешь впасть в petitio principii» [13].

Пуанкаре считал, что такое определение «не определяет ничего». «Вера в существование актуальной бесконечности дала начало этим непредикативным определениям. Объяснюсь: в этих определениях фигурирует слово «все»,…, слово «все» имеет вполне ясный смысл, когда дело идёт о конечном числе предметов; для того, чтобы оно имело смысл, когда их бесконечное число, должна была бы существовать актуальная бесконечность. В противном случае нельзя представить себе все эти предметы данными раньше их определения, и тогда раз определение какого-нибудь понятия N зависит от всех предметов A, то оно может оказаться заключающим в себе порочный круг, если среди предметов A есть такие, которые нельзя определить, не прибегая к самому понятию N» [14].

В 1908 году А. Пуанкаре потребовал, чтобы все определения в математике были строго предикативными, то есть не содержали ссылок не только на определяемое понятие, но и на множество, его содержащее. По его мнению, существование в математике означает отсутствие противоречия, и все теории являются соглашениями учёных о терминах и методах, а единственное требование к ним – непротиворечивость.

«Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло ее; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Еще другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «вот для чего я внес в определение то-то и то-то»[14].

Впоследствии Лузин отмечал: «На затруднении иметь аксиоматику целых чисел без petitio principii весьма настаивал в своё время А. Пуанкаре, который выражал сомнения относительно возможности без petitio principii определить число 2, когда число аксиом арифметики заведомо больше двух. По этому поводу памятен вопрос А. Пуанкаре, обращённый к математику, пытавшемуся символически обосновать ему арифметику: «Как я могу сомневаться в существовании числа, раз вы мне тут написали Ω?» – т. е. Пуанкаре требует запретить включение элемента во множество, определённое посредством своих элементов» [15, т. 2, с. 517].

Но успешность определения нового частного понятия на основании обобщения интуитивной информации о более общих классах таких частных понятий оказалась плодотворной. Здесь проявляется порождающая роль словесных определений, когда понятие в своём развитии обогащается новыми признаками.

Это открыло простор развитию дескриптивной теории множеств, теории функций и теории меры. Это же в силу индивидуальности представлений каждого математика при абстрагировании, породило разногласия по поводу строгости и использования принципа предвосхищения основания.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VIII

Фрагменты из конспекта лекций Вейерштрасса 1886 года[56] [11]

«Избранные главы из теории функций»

K. Weierstrass. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner. – Archiv für mathematic. Band 9, 272 S. Reprint 1989.

Стр. 20. Вторник, 25. 5. 1886

Эти лекции составлены таким образом, чтобы *дополнить* лекции по теории аналитических функций зимнего семестра 1884/85. Та цель, которая имелась в виду, была достигнута, но более синтетическим методом, и некоторые результаты не получили желаемого обобщения, качество доказательств не было в полной мере удовлетворительным. Таким образом представляется полезным после этих лекций рассказать о различных методах, лежащих в основании теории функций, проследить их исторически и критически чтобы продемонстрировать различные точки

---

[56] Перевод Г. Синкевич.

зрения и попытаться их примирить. Короче говоря, показать тенденцию исторического развития математической науки, особенно в области анализа, и таким образом объяснить основные понятия науки. Нашей целью будет показать, что принципы математической науки основаны на действительно прочном фундаменте. Однако даже введение в математические науки требует изучения различных проблем, что в первую очередь показывает нам значительность и состоятельность науки. *Конечной целью* однако является, что мы всегда должны иметь в виду, одним из *оснований* науки является стремление получить уверенность в справедливости исследования.

§ 1. История возникновения понятия функции. Вторник, 25.5.1886

Наша современная теория функций развивалась постепенно. Сначала вообще слово «Функция» начал использовать Лейбниц, однако первоначально понятие функции не было чётким. Сначала названия появлялись при некоторых исследованиях алгебраических кривых, когда вычислялись их арифметические выражения через абсциссу, как те же самые функции, например, ордината, длина касательной до точки пересечения с осью абсцисс. В дальнейшем так стали называть величину, посредством которой другая величина вычисляется с помощью простой определённой арифметической операции, как такая функция. Якоб Бернулли внимательно сделал на основании этого полезный вывод, это понятие обобщил и сформулировал, что величина, вычисляемая посредством простых арифметических операций над названной величиной, есть функция от величины названной. Лейбниц приспособил (унифицировал) это предложение, и его определение понятия функции осталось на долгое время господствующим. Это понятие функции было выражено так успешно, что вошло в обиход и обеспечило дальнейшее развитие понятия функции. Это привело к дальнейшему развитию алгебраических уравнений, функций с рациональными коэффициентами переменных величин, в то время как функции от этих величин предполагались по-прежнему возможными, а корни любых алгебраических уравнений с помощью ограниченного числа арифметических операций вычислимыми. Это нашёл Эйлер в своём Introductio (Введении в анализ бесконечно малых), а во времена Лагранжа и других значительных математиков был принят [принято определение функции как] совместный закон функциональной зависимости арифметических величин. Наряду с этим определением функции как арифметического выражения нашлось однако уже давнее другое, на первый взгляд совершенно иное, казалось бы. Иоганн (Jean) Бернулли, брат Якоба, строго придерживался этого определения; он указывал на то, что величины имеют геометрическое или естественное происхождение, и несомненно, что каждое значение величины или нескольких разных величин соответствует особого рода непрерывному изменению одной величины или одному непрерывному изменению, влекущему её существование, и зависимость арифметических выражений друг от друга поясняет и подтверждает такое существование. Поэтому требуется сформулировать общее понятие функции, чтобы это определение содержалось в нашем изложении идеи [11, с. 21]. Этот более поздний подход представляют главным образом Карно, Коши, Дирихле и другие. Если изменяющаяся величина связана с другой, когда значению одной величины соответствует значение другой, будем говорить, что последняя величина есть функция первой. С целью пояснения скоро посмотрим (познакомимся) с такими функциями, которые мы смогли определить, когда бесконечно малому изменению аргумента соответствует такое же изменение функции (функция изменяется бесконечно мало вместе со своим аргументом), таким образом для единичной (сингулярной) точки функция не определена. В качестве примера можно привести явное обобщение понятия функции в комментарии. Мы установим взаимную зависимость влияния (воздействия) двух планет. Каждая из них имеет определённый математический центр тяжести, хотя и непостоянный, ни одна планета не находится в устойчивом состоянии, однако в каждый миг имеет хорошо определённое положение в планетном теле (в межпланетной среде). Расстояние между обеими планетами измеряется как расстояние между их центрами тяжести, это переменная величина, хотя в каждый момент величина вполне определённая. Установив должным образом начало координат, мы вычисляем время, имея определённую единицу времени, так что получаем в каждое мгновение отсчёт величины времени, в каждое мгновение соответственно для вполне определённой единицы длины определяем величину расстояния, и таким же образом мы можем выразить величину времени. Мы имеем таким образом две друг от друга зависящие величины. Каждое значение времени t соответствует значению r расстояния между центрами тяжести. Теперь закон известен для каждой планеты относительно другой, и приобретает законченный вид, так что положение центра тяжести в теле (среде) определено, что обусловлено, когда закон по-прежнему арифметически выражен, r действительно представляет собой функцию от t. Но это употребление совершенно не удаётся, без того, чтобы r прекратилось, вполне определить функцию от t саму по себе. По правде говоря, закон взаимного влияния двух планет точно неизвестен; если в основе рассуждения лежат ньютоновские гипотезы, тогда закон достоверно обоснован, но мы хорошо знаем, что на движение также влияет сопротивление и силы трения, так что наше описание приблизительно. Теперь поставим вопрос: каковы предпосылки обоюдной зависимости r и t, если закон воздействия обеих планет друг на друга неизвестен, тогда необходимо, чтобы существовало условное арифметическое выражение, найденное каким-то образом, допускающее вычисление r для каждого произвольного приближения значения t. Другой очевидный вопрос: будет ли обеспечиваться непрерывность функции в том случае, когда может быть дана арифметическая зависимость, всегда ли можно это установить или нет. Это один вопрос, на который вряд ли кто-нибудь может ответить заранее. Можно усомниться, отвечает ли здравому смыслу определение Жана[57] (Jean) Бернулли в отличие от более общего определения Лейбница. Покажем это в сравнении, для каждой зависимости обеих переменных величин арифметического выражения соответственно, и также обязательно для обоих определений, в то время как равноправность сохраняет силу. Наряду с нашим обсуждением попутно поставим вопрос, хотим ли мы на этой лекции ещё заниматься?

§ 2. О так называемом произвольном представлении функций

Мы сейчас не намереваемся дать арифметическое определение функции, но проложим путь в противоположную сторону; мы предположим, что существует [числовая] величина, зависящая от одной или нескольких переменных, которая непрерывно с ними изменяется, и докажем, что эта определённая величина будет непременно представлена определённым арифметическим способом. Это будет осуществляться следующим образом: берётся какая-нибудь неограниченная переменная величина t, принимающая значения от $-\infty$ до $+\infty$, и та же самая функция r, так что если принять любую сколь угодно малую величину δ, то целая [целая рациональная] функция от t, с рациональными числовыми коэффициентами, так определённая, что разность между истинным значением r и r из вышеупомянутого выражения для какого-нибудь значения t

---

[57] Иоганна.

будет меньше чем δ. И далее мы будем полагать, что *функция посредством бесконечного ряда представлений для отдельных рациональных членов и есть вся функция с рациональными числовыми коэффициентами*, то есть осуществляется вычисление арифметического выражения, выполненное так подробно, что для любого требования к точности для любой величины *t* функция может быть представлена с любым приближением. Следуя рассуждению Бернулли, мы *довольствуемся ограниченным предварительным представлением о действительной переменной.* Раньше предполагали, что представление [функции] рядом Фурье разрешит рассматриваемую проблему, между тем обнаруживается, что существует непрерывная функция, которая не может быть получена при этом способе задания.

В дальнейшем отсюда следует, что и при расширении понятия функции на функцию нескольких переменных форма изложения теорем не изменится. Ошибочна также такая точка зрения, что превращение функции в степенной ряд ограничивает представление о ней; наоборот, это расширяет возможности её всестороннего использования.

Среда, 26. 5. 1886

Для того, чтобы ещё раз обсудить вышеуказанные теоремы, заметим, что переменная принимает все значения от минус до плюс бесконечности, что не изменяет степени общности, когда функция определена только в конкретной области изменения независимой переменной, и она может быть легко вычислена. Далее предположим, что рассматриваемая функция *непрерывна*. Кроме того, предположим, что функции так сказать, *произвольны* или неопределены, хотя это не очень подходящее название. Истинный смысл этой теоремы заключается в том, что для строго определённой непрерывной функции также всегда можно найти математическое выражение. Преимуществом этого утверждения является то, что оно указывает, как можно вывести свойства любой функции из основных понятий непрерывности, так как в любом научном исследовании важно извлекать из основных понятий дальнейшие последующие. После того как мы признали возможность представления функции для каждого конкретного случая, когда можно это представление найти, то есть вы действительно должны знать о функциях, что они допускают аналитическое представление. Получается, что функция допускает представление, если это возможно, себя самой и своего произведения на некоторые степени аргументов внутри некоторых пределов интегрирования. Интегрирование само по себе является следствием предполагаемой непрерывности.

§ 3. Доказательство теоремы, что $\lim\limits_{k=0} F(x,k) = f(x)$, если

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \text{ и } \omega = \int_0^{\infty}\phi(u)du$$

Пусть x это действительная переменная, принимающая значения от минус до плюс бесконечности, и $f(x)$ это действительная непрерывная функция, единственным образом вполне определённая для всех значений x, и далее мы предполагаем, что абсолютные значения $f(x)$ имеют *верхний предел*, как, например, такие ограниченные функции действительного переменного, как $\sin x$, $\cos x$. Мы будем понимать *непрерывность в обычном смысле*, а именно, что $f(x + h) - f(x)$ исчезающее мало вместе с h, или, другими словами, для любого положительного сколь угодно малого ε будет выполняться, что когда абсолютная величина h предельно ограничена δ, тогда

$|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$.

Давно известно, что при этих условиях не вполне обосновано такое утверждение, что

$\lim\limits_{k=0} k\sqrt{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2}du = f(x)$, где k рассматривается как некоторая положительная действительная величина.

Пусть $\phi(x)$ – функция той же природы, что и $f(x)$, т. е. для всех значений x должно выполняться, что она определена и непрерывна, а её абсолютное значение не превышает определённого предела. Кроме того в интервале она не будет изменять знак и будет чётной, т. е. $\phi(-x) = \phi(x)$.

Все эти условия, как мы видим, выполняются, например, для $e^{-k^2x^2}$, она исчезающее мала на минус и плюс бесконечности, а её верхний предел равен 1. Сейчас существует бесконечно много таких функций. Для таких $\omega = \int_0^{\infty}\phi(x)dx$ существует проблема обобщения утверждений о том, что, как будет показано, если $\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\phi\left(\frac{u-x}{k}\right)du = F(x,k)$ справедливо, тогда $\lim\limits_{k=0} F(x,k) = f(x)$ [11, с. 25].

Для того, чтобы прояснить смысл, сделаем следующее: придадим x какое-нибудь конкретное конечное значение, так что для k можно будет определить верхний предел $\overline{k}$, чтобы $F(x,k)-f(x)$ стало произвольно малым. Но это утверждение имеет ещё и другой смысл: если для x определить два конечных предела a и b, то будем утверждать, что наше допущение позволяет найти сколь угодно малую положительную величину ε, для которого можно установить верхнее значение $\overline{k}$ для k такое, что любая данная величина из интервала будет удовлетворять неравенству $|F(x,k)-f(x)|<\varepsilon$. В этом случае говорят, что приближение для данного значения x в пределах конечного интервала $(a\ldots b)$ происходит *равномерно*. Доказательство почти очевидно, оно использует только понятие интеграла. [11, с. 26], теорема о среднем [11, с. 27].

[Равномерная сходимость]

Мы хотели бы привести некоторые теоретические соображения по поводу *оснований практического применения этого метода*. Если известно только то, что ряд абсолютно сходится, то для каждого **определенного** значения аргумента мы можем вычислить значение функции с заданной точностью; если ряд **равномерно сходится –** это относительно; практически важнее, что значения *аргумента* не должны быть заданы с абсолютной точностью, поэтому можно сказать, что такой ряд представляется сходящимся к функции, когда значения аргумента сходятся (выбираются) любым способом. Это применение так важно в тех случаях, когда значения аргумента используются там, где результат зависим от неизбежных ошибок измерений или наблюдений, или зависит от результатов предыдущих расчётов, следовательно, никогда не может быть вычислен с абсолютной точностью. Потребуем, чтобы функция вычислялась с ошибкой, меньшей, чем некоторая заданная малая величина g, разложим эту величину g на $g_1 + g_2$; можно выделить n членов ряда таких, что для $x = x_0$ значение функции достигается с ошибкой, которая меньше, чем g_1, выберем тогда вместо $x = x_0$ соседнюю величину $x = x_1$, так, чтобы всегда $|G_n(x_1)-G_n(x_0)|<g_2$, здесь $G_n(x)$ – непрерывная функция своих аргументов, так что $|f(x_0)-G_n(x_1)|<g$.

Теперь мы знаем, что можем управлять точностью по потребности и по нашему желанию, при этом без вынужденного прерывания в области (поле) рациональных чисел, так как мы всегда можем указать аргумент x_0 сколь угодно близко расположенный к рациональному аргументу x_1. В то же время мы видим, как мало значит ряд с неравномерной сходимостью на практике, так как он недостоверен, какие бы точные значения аргумента мы не подставляли.

Мы сейчас приближаемся к вопросу о приложении наших рядов для вычисления функции, посредством формулирования утверждений, что для любого значения x, для которого функция определена, она *действительно представима*. Прежде чем давать точное доказательство, сделаем несколько предварительных арифметических замечаний [11, с. 36].

Стр. 37. Вторник, 1. 6. 1886

§ 5. Отступление. Общий обзор арифметики

Хотя понятие числа является чрезвычайно простым, определение ему дать нелегко, особенно для обучения. Самый лучший способ выявить понимание природы числа, это посмотреть, что происходит в нашем сознании в процессе *счёта*. Счёт происходит из тех двух фактов, что человеческий разум обладает способностью составлять представление о внешней и внутренней стороне вещей, и следует отметить, что у него есть способность воспроизводить эти образы неоднократно. Мы формируем идею вещи α так, что можем воспроизвести её произвольно или выбрать из данной обозримой *совокупности* (Aggregat, агрегат, многочлен) вещей выделить вещь α как первую, и кроме того, создать представление об идее второй вещи. Можем ли мы произвольно и успешно продолжать эту операцию – это и есть вопрос, именуемый в логике сложной (составной) идеей (составным представлением). Мы тоже будем придерживаться этого и назовём вещь α *единицей*, таким образом мы получим два ряда идей, как только что говорилось, сравнимых следующим образом:

Каждому *элементу* ряда a можно поставить в соответствие элемент ряда b, при этом возможны три случая: или каждый элемент ряда a поставлен в соответствие элементу ряда b, и таким образом все элементы будут совершенно исчерпаны, или ещё останутся элементы из a, или, останутся элементы из b. Это создаёт *понятие* отношений «*равно*», «*больше*» и «*меньше*». Конечно, мы должны признать, что названный набор представлений переменчив, и не зависит от единицы α, подобно тому, как изменяется длина прямой линии после определения *единицы длины*. Но невозможно придерживаться данного определения числа как идеи количества вещей, так как мы вводим количество таких вещей непосредственно, что весьма ограничивает наши возможности. Таким образом, в последовательном присоединении членов ряда нет никакой идеи счёта, но он в соединении идей, тем более, что эта способность формирует личность, совершенствующую своё мастерство счёта [11, с. 36]. Обычно в первый момент мы можем охватить от 5 до 6 в массе, которую фактически не пересчитать, но есть люди, у которых эта способность гораздо более развита (Dahse). Числа и цифры служат для того, чтобы формализовать это представление (идею), особенно недавно сформированный метод для больших множеств вещей, их количество может быть обозначено достаточно лаконично и наглядно. Таким образом, суть вполне упорядоченного множества вещей состоит в том, что, во-первых, идея *единицы* воспроизводится, во-вторых, полностью определено *количество* вещей, независимо от того, получилось ли оно путём моментального видения или пересчёта. Если с первым всё ясно, можно пойти дальше и расширить концепцию числа соответсвенно природе числа, объединив несколько единиц. Пусть g – это последовательность различных представлений α, β, γ, …, представляющая собой такую идею, что отдельные вещи в определённом смысле следуют друг за другом. Мы получим вполне упорядоченное множество вещей как однородных (соразмерных) *понятий*. Эта величина (размер) переменна (изменчива) в том смысле, что каждый элемент α, β, γ, …, может иметься в различных количествах. С каждым добавлением любого элемента к упомянутой величине, понятие *агрегата* остаётся прежним и неизменным, подобно тому, как понятие прямой сохраняется при добавлении ещё одной длины. *Истинная природа величин состоит в том, что это такие вещи, которые можно изменять без того, чтобы изменять связанное с ними понятие*. В этом смысле мы называем каждую переменную последовательность предметов величиной и так как количество вхождений каждого предмета существенно, с помощью элементов α, β, γ, … создаётся *числовая величина*. Теперь, если последовательность будет полностью определена, необходимо будет указать, какой элемент в каком месте находится, и как часто встречается каждый указанный элемент. Однако в настоящее время в прикладных вопросах математики при вычислении *числовых величин* порядок (очерёдность) появления отдельных элементов не имеет значения, так что числовая величина вполне определена данной совокупностью элементов и посредством этих данных, указав составляющие её элементы и их частоту, мы определяем последовательность. Это непосредственно приводит нас к значительной разнице между простыми и *комплексными числами*. В простых числовых величинах для построения используется один элемент α, а во втором случае величина состоит из нескольких элементов [11, с. 39]. Комплексное число формируется из величин α, β, γ, … , связь между ними не предполагается, важность имеет только их совокупность и их порядок. Если мы хотим сравнить между собой две таких числовых величины, которые мы образовывали несчётное число раз, тогда сравниваем всю совокупность в целом, и эти числа тогда будут называться равными, когда каждый элемент из первой совокупности встречается так же часто, как и во второй совокупности. Отношения «больше» и «меньше» могут быть определены, но не здесь. Зато сейчас мы можем определить операцию сложения двух комплексных величин a и b. […].

Математика имеет дело с *числами разного рода*, отдельные элементы, из которых они состоят, находятся в определённых отношениях друг к другу. Представьте себе, что они были сформированы из арифметики целых чисел, и мы пришли к понятию *отвлечённых (абстрактных) чисел*, их сложению, умножению, делимости, неделимости, короче, в царство *чистой арифметики*. Что касается общей теории числа, то она началась с тех пор как начали измерять. Представьте себе, например, что вы взвешиваете, причём, мы представляем абсолютную точность весов по своему желанию. Мы видим, что разного вида и имеющие разные свойства вещества, однако, могут иметь одинаковый вес, с другой стороны, те же различные вещества из разных субстанций сложно различить. Если мы хотим иметь определённое представление о весе, нужно уметь производить вещества требуемой массы. Так как наше *применение* не требует абсолютной точности, то будет достаточно располагать весами α, β, γ, … , это позволит, используя их в различных сочетаниях и каждое из них в определённых количествах, выразить вес представленного материала с необходимой точностью [11, с. 40]. Может быть другая идея взвешивания, когда мы для более точного взвешивания располагаем различными гирями и разновесками. Практически мы принимаем произвольную единицу α, вторым разновеском берём β, про которую мы знаем, что если взять определённое количество β, то можно заменить его на α, а в качестве третьего разновеска возьмём γ, которая относится к β как β к α и т. д. Важно лишь то, чтобы отдельные разновески относились определённым образом между собой. В наличии постоянно должна быть *основная единица (Haupteinheit)* и *суб-единицы (Untereinheit)*, с помощью некоторого количества которых можно выразить основную единицу. Это утверждение ближе всего к первоначальному, чтобы построить основу, которая состоит из величины α и совокупности её частей, каждая из которых из неё образована: числовая величина имеет конкретный смысл, которому мы придаём отчётливое значение *величины* в том самом смысле, который хотели определить. В то же время у нас есть возможность изменить различные значения числовых величин без изменения их величин; мы добавляем сначала величину, которая раньше была основной и рассмотренные составленные части, и называем это *положительным числом* [11, с. 39].

Стр. 40. Среда, 2.6.1886

Здесь важно рассмотреть понятие *части величины*, которая есть не что иное, чем определённое количество взаимозаменяемых величин. Можно утверждать, что (две величины) *эквивалентны* друг другу, без их полной идентичности, т. е. без одинакового количества элементов. Рассмотрим, например, основную единицу α и суб-единицу β, которая может быть взята, чтобы n раз заменить α и наоборот, α можно заменить на $n\beta$, тогда мы получим разные числовые значения, которые эквивалентны друг другу. А теперь представьте себе последовательность частей основного элемента в целом, легко видеть, что любая из частей опять в свою очередь имеет свои части. Таким образом, мы можем преобразовать любое количество чисел, заменяя в любом элементе любую произвольную его часть, но и обратно, заменяя количество элементов на эквивалентные им [11, с. 41]. Отсюда следует, что любую числовую величину можно представить через единственный элемент группы, а другие элементы как кратные из этой группы. Поскольку элементы α, β, γ, … , по отношению к основной единице имеют «знаменателем» 1, m, n, …, можно сначала найти число-делитель для 1, m, n, …; это будет = r, тогда α, β, γ, … , кратны данному элементу со «знаменателем» r. Если у нас два различных числа, то можно сначала представить каждое из них кратным элементам, и каждый (и тот и другой) из этих элементов снова представим как кратное этих последних элементов. Теперь мы можем сравнить два числовых значения друг с другом и таким образом прийти к понятиям «равно», «больше», «меньше» для любого количества переменных, которые мы сейчас рассматриваем. Основанием для этого расширения понятий является следующее: прежде всего существует бесконечно много чисел r, которые являются общим кратным знаменателем данных элементов. Итак, преобразуем число к двум другим: одно, кратное r-ой, и другое, кратное s-ой частям от основной единицы; нужно показать, что в результате сравнения двух таких числовых представлений элементы приводятся к общему знаменателю. Это доказывается с помощью следующего утверждения:

Если r является наименьшим общим кратным нескольких чисел, то все другие общие кратные будут кратны r, так что результат сравнения двух числовых величин с общим знаменателем является независимым (самостоятельным).

Сейчас законным будет ввести условия для отношений «равно», «больше», «меньше» по законам логики (если $a = b$, $b = c$, тогда $a = c$, и если $a>b$, $b>c$, тогда $a>b$), эти условия сохраняют законную силу. Теперь легко образовать понятие сложения: $a + b$ это такое число, под которым понимаем как возникающее, когда элемент a прибавляем к неизменённому элементу b, или к любой другой величине, ей (т. е. b) эквивалентной. Мы знаем, что для нескольких слагаемых очерёдность сложения не имеет значения, теперь перейдём к определению умножения и покажем, как применять известные теоремы. Наряду с понятием кратного доступно понятие части. Это показывает, что для числовой величины существует произвольная кратность, а также и любые части, и благодаря этому можно найти для любой отдельной (заданной) составной части числовой величины соответствующую выбранную часть [11, с. 42]. Мы можем придти к такому заключению, что умножить два числа друг на друга – это значит умножить каждую часть одного числа на каждую часть другого и результаты сложить. Поэтому для того, чтобы *определить перемножение* двух элементов, мы рассуждаем следующим образом: произведение m-й и n-й частей основной единицы равно mn-й её части. В силу этого предположения сохраняются все законы, которые были установлены для отвлечённых (unbenannten, неименованных) чисел.

Последовательность из комплексных величин может быть составлена таким же образом. Она может быть как *бесконечной*, так и конечной, если только предположить, что она определена, Тогда мы можем указать, какой элемент находится на каждом определённом месте. Так, например, бесконечная последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... не имеет никакого предела, но полностью определена, так как ясен процесс её формирования. Если в природе в этом смысле существует бесконечный ряд вещей, неважно, сколько бы их ни было, в *мире наших мыслей* есть представление о какой-нибудь вещи, взятой лишь один раз, и можно сколь угодно много это воспроизводить, делая это без конца. Взяв за основу бесконечный ряд 1, 2, 3, … , мы потом сможем определить всякий другой последующий элемент, составленный из единиц (из чисел) 1, 2, 3, … по порядку, например, $1, {}^1\!/_2, {}^1\!/_3, ...$ полностью определена для каждого элемента, стоящего на любом месте. Мы оставляем за собой свободу использовать эту бесконечную последовательность произвольного количества элементов в формировании числовых величин. Это будет нужно, даже если мы рассматриваем числовые величины, сформированные из конечного числа элементов. Так как мы уже дошли до числовых величин, знаменатели которых сколь угодно велики, возникает необходимость научиться осторожно обращаться с ними как с основанием любой части единицы. Если мы теперь положим такую бесконечную последовательность элементов, составляющих числовую структуру, то мы теперь можем обнаружить становление числовой величины, состоящей из бесконечного числа элементов. Такое число определено, когда можно указать, сколько раз в нём встречается каждый элемент. Кроме того, к этому следует добавить число 0, употребляемое, когда какой-нибудь элемент не встречается. Например, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...$ имеет совершенно определённое значение. Вся трудность состоит в том, чтобы определить, что мы понимаем под *числовой величиной, созданной в виде равенства с бесконечно большим количеством* элементов. В этой проблеме обычно умалчивается тот факт, что изначально такая численная величина определяется приёмом расширения чисел с помощью предельного перехода. Если дано число a, то сначала нужно определить, сколько раз в нём содержится основная единица α, это число будет $= n$. С остатком поступим таким же образом относительно второй элементарной единицы, и так далее. Эта операция может либо завершиться, тогда число a состоит из конечного числа единиц, либо нет, что представляет собой более общий случай. Тогда число a будет состоять из бесконечного числа элементов. В силу данного представления мы основываемся на измерении длины, но теперь совершенно ясно, что любые длины могут быть представлены числами с помощью найденной единицы измерения и представляют собой число, но отсюда явно не следует, что всякому числу, образованному бесконечным числом элементов, соответствует длина; в этом смысле эквивалентность означает, что число также имеет реальное существование, хотя истинность этого утверждения вытекает из всех приложений арифметики, учение о числовых величинах по умолчанию подразумевает это предположение. Это утверждение не может быть доказано без того, чтобы не сформулировать новую гипотезу, поскольку понятие линии является чисто эмпирическим. *Вне всякого сомнения*, в указанном смысле числовые величины *определённо существуют*, и поэтому мы обязательно должны дать арифметическое определение иначе, чтобы не зависеть от гипотез, и кроме того, постараемся дать определение различными способами, из которых отдадим предпочтение следующему: для численных величин, состоящих из конечного числа элементов, *понятие равенства можно было бы заменить понятием эквивалентности*. Пусть *a* – некоторое произвольное число и *c* – число, образованное из конечного числа элементов: мы будем говорить, что число *c* содержится в числе *a*, если *a* можно так преобразовать, что все без исключения элементы *c* входят в *a*, и если это так, то не все элементы *a* исчерпаны. Пусть теперь имеются два произвольных числовых значения *a* и *b*, они совпадают, если любое число *c*, содержащееся в одном из них, содержится и в другом. Нужно только доказать, что это *расширенное понятие равенства* содержит в себе первоначальное [определение равенства]. Как только мы это установим, мы убедимся, что из $p = q$, $q = r$ следует, что $p = r$. Кроме того, если число *c* содержится в числе *a*, но не содержится в числе *b*, мы будем говорить, что *a* больше, чем *b*. В настоящее время существует несколько типов конечных и бесконечных числовых величин. Используются числовые величины конечных и бесконечных значений. А именно, очевидно возможно, чтобы в числовой величине содержалось любое другое значение. Такую числовую величину мы будем называть *бесконечно большой*. Это доказывает необходимость ограничить применение математических операций только к *конечным величинам* [11, с. 43].

Пятница, 4. 6. 1886

Решение о том, являются ли два числа равными друг другу, естественно, не следует из того, что нужно проверять, входит или не входит каждое число *c* в два других числа; но есть способ показать, что не найдётся никакого *c*, входящего соответственно в оба числа. Если значение *c* содержится в каком-то числе, это же относится и к числам, меньшим *c*. Кроме того, если два числовых значения *a* и *a'* не равны друг другу, должно существовать бесконечное количество числовых значений, сформированных из c, таких, что они содержатся в одном числе, но не содержатся в другом. После того как мы сформулировали эти определения, можно теперь без труда найти последовательности с бесконечным числом переменных. Если у вас есть сумма двух чисел, и основной (образующий) элемент входит в каждое из этих чисел соответственно p и q раз, тогда он входит в сумму $p+q$ раз. Это можно распространить на *сумму бесконечного числа слагаемых*, но пока ещё нужны предпосылки становления: мы уже определили понятие бесконечно большого числа. Возьмём, например, число с элементами $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$, и мы сможем известным образом доказать, что в нём содержится любое число c. Мы сейчас покажем, что существует конечное число членов, которые сами по себе имеют величину, превосходящую c. Между двумя такими величинами бесконечных размеров в настоящее время невозможно никакое сравнение. В отличие от этого величина называется конечной, если существует бесконечное количество числовых величин, которые в рассматриваемой числовой величине *не* наблюдаются. Так как числовые величины, используемые теперь в математике, представляют собой главным образом отношения (пропорции) различных чисел к другим числам, то ясно, что такие численные значения всегда имеют конечную величину, поэтому и мы в наших расчётах ограничимся такими числовыми значениями, величины которых ограничены. Пусть суммируется бесконечно много произвольных величин. Если правила суммирования конечного числа слагаемых действуют, то может оказаться, что полученный таким образом результат конечен или бесконечен. Но сейчас числовая величина считается определённой, если она задана для каждого элемента, что, как правило, и бывает. Вообще говоря, бесконечное количество суммируемых чисел возможно, поэтому прежде всего необходимо, чтобы каждый определённый элемент ряда $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$ встречался только конечное количество раз [11, с. 44]. Тогда суммирование формально осуществимо. Остаётся ещё вопрос, при каких условиях сумма конечна, если каждое слагаемое удовлетворяет этому условию. Для этого рассмотрим следующее соображение: чтобы $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ имело конечное значение, нужно, чтобы данные величины, большие конечного числа, и следовательно, большие чем любое из конечных чисел-слагаемых, образовывали сумму. Последнее и является определяющим в вопросе о критерии. То, что это обеспечит не только необходимое, но и достаточное условие, следует из того, что можно указать величины, значение которых больше, чем любое из a_1, a_2,..., образующих сумму, так что на самом деле последовательность имеет конечное значение в силу нашего предыдущего определения. И в том, и другом предложении очевидно, что если сумма a_1, a_2,..., имеет конечное значение, только тогда конечное количество этих элементов будет больше, чем некоторое, но небольшое g. Обычно мы полагаем, что последовательность слагаемых вполне упорядочена, каждому слагаемому соответствует определённая точка. Можно легко показать, что посредством продолжающегося сложения складываются все входящие элементы, причём с той частотой, с которой они входят в сумму. Представьте себе небольшое число g, и есть лишь конечное число из элементов a_1, a_2,..., которые $> g$. Потребуем, чтобы, как говорится, члены последовательности становились неограниченно малыми с увеличением номера. Это условие не является достаточным. Для того чтобы его получить, принято действовать следующим образом: обозначим сумму n первых элементов s_n и рассмотрим последовательность величин s_1, s_2, s_3,...; потребуем, чтобы эти суммы имели конечные значения, то есть чтобы s_n оставалась ниже определённого предела. То есть вы берёте n достаточно большим, чтобы $s_{n+r}-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+r}$ для любого r может быть сделана сколь угодно малой. Кроме того, можно показать, что если в силу нашего предположения величина g при n превышающем ν так определена, что упомянутая разность при $n > \nu$ может быть меньше, чем g, то последовательность имеет конечное значение [сумма ряда конечна]. После того как мы исчерпали весь этот вопрос, можно сказать о сложении неограниченно большого числа элементов, и определить *понятие умножения*. Оба закона, относящиеся к этому, таковы: произведение двух элементов со знаменателями m и n будет иметь знаменатель mn; что касается выполнения умножения [рядов, сумм], то вы должны умножить каждый член одного ряда на каждый член другого ряда, а потом все эти произведения сложить [11, с. 45]. Оказывается, что каждый элемент встречается только конечное количество раз. Возьмём, например, конкретный элемент $1/n$, и рассмотрим, как часто он встречается в произведении, разложим a на $a' + a''$, где в a'' не содержится элемент $1/n$, и аналогично b на $b' + b''$, где b'' имеет аналогичный смысл, что и a''. Затем, когда получено ab, тогда как $a'b''$, так и $a''b'$, так и $a''b''$ – это всего лишь элементы, у которых знаменатель $> n$, и только в $a'b'$ встречаем элемент со знаменателем n, и a' и b' имеют конечное число членов, таких, что в a и, тем паче, в $a'b'$ элемент $1/n$ входит конечное число раз. После того, как мы показали, что умножение по указанным правилам по этому определению остаётся тем же, а понятие произведения бесконечного числа сомножителей без некоторого обсуждения не представляется возможным. Однако вместо того, чтобы на этом останавливаться, мы обратимся к рассмотрению *более чем одного образующего элемента сложносоставленной числовой величины*.

Суббота, 5. 6. 1886

Это может быть получено более простым путём, если поставить целью продолжить изучение арифметических свойств, проявляющихся в процессе исследования. Из *понятия* суммы следует, что к заданному числу нужно прибавить такую *разность*, чтобы сумма приобрела заданное значение. До тех пор, пока мы определяем числовые величины с ограничениями, приходится признать, что дальнейшее изучение невозможно. Не использовать ли нам испытанную форму $a - c$, чтобы перейти к виду $a - c + c = a$ и потом ввести новые единицы. Здесь мы сразу увидим, что если возможна операция вычитания, мы должны ввести для любой величины a другую величину a', так чтобы $a + a' = 0$. Ноль сам по себе имеет реальный смысл, потому что он выражает отсутствие каких-либо единиц. Не только ради простоты мы пишем 0 вместо 0 0 0 … . Предположим, что a и a' одновременно входят в какую-нибудь сумму, это в дальнейшем не повлияет на величину суммы, так как a и a' находятся друг с другом в таком отношении, что их одновременное присутствие равносильно их отсутствию [11, с. 46]. Поскольку изменение, возникающее с добавлением a, отменяется посредством добавления a', оно аннулируется. Сейчас мы попробуем сформировать числовые величины с помощью гипотезы о произвольной основной единице и её противоположности, части этих обеих единиц ввести как вспомогательную единицу. Тогда сразу ясно, что когда единица γ является n-й частью α, то также и единица, противоположная γ, противоположна n-й части единицы α.

[…] – сумма, разность, произведение и частное чисел; о формальной алгебре; комплексные числа и операции над ними только в алгебраической форме:

$$E \cdot E = E$$

$$E \cdot I = I \cdot E = I$$

$$I \cdot I = -E$$

Теперь мы уже достаточно знаем об этих двух основных единицах [действительной и мнимой $\xi + \xi' i$], профессор Вейерштрасс изложил это в отдельном трактате. Это не является непосредственно необходимым для отрезков обеих прямых, взаимно ортогональных, размеры которых ξ и ξ'; здесь мы сформулируем это в виде простых отношений. Мы хотим дать полезное определение. Для переменных e, i, $-e$, $-i$, одной величины назовём каждую следующую величину *сопряжённой*, при условии, что очерёдность сохраняется, какое бы геометрическое представление эти величины не имели.

Аналогичным образом для любой комплексной величины a, по-иному сопряжённой, заменяя единицы на сопряжённые, получим тем самым величины a', a'', a'''. Теперь легко видеть, что выбранное нами представление четырёх таких величин, изображается взаимно перпендикулярными отрезками. Умножение можно определить так, чтобы умножение на своё сопряжённое формировало произведение новых единиц так же, как это получалось с перемножением прежних единиц.

Вторник, 8. 6. 1886

Мы уже оценили значение положительных и отрицательных элементов, образующих ряд, в предположении, что ряд из положительных и ряд из отрицательных величин рассматривается сам по себе как имеющий конечное значение [11, с. 53]. Как показали исследования в математическом анализе последнего времени, это условие является достаточным, но никоим образом не необходимым для того, чтобы общая сумма была конечной, так что можно пренебречь упомянутым ограничением, и исследовать ряды, у которых абсолютные величины положительных и отрицательных членов не являются конечными. Такие ряды, как например, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, который, как известно, имеет конечное значение, без того, чтобы $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$ или $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$ имели бы конечные значения. Особая трудность в исследовании таких рядов заключается в том обстоятельстве, что они не всегда дают определённое значение, например, если переставить чередующиеся элементы, и положить в основу суммирования новую очерёдность элементов. Если же говорить вообще о произвольном ряде, по умолчанию предполагается, что мы придерживаемся первоначальной очерёдности элементов; обозначим тогда сумму первых членов s_n, тогда естественно будет определить *значение (суммы) ряда* как предельное значение при $n = \infty$, то есть $\lim\limits_{n=\infty} s_n$. В силу арифметических представлений, которые здесь изложены, это недопустимо, мы не исходим из того предположения, что это пограничное значение, предел, но мы рассматриваем смежное понятие предела (Grenzbegriff), которое нужно определить арифметически. Предположив для сравнения геометрическую интерпретацию, согласно которой можно представить любое число изображённым на любом расстоянии, получим, что s_n для любого значения n представляет собой при этом способе произвольно бесконечное определённое протяжение, приближающееся к пределу от границы, s_n при увеличении n, в то время как эта граница сама по себе означает, что в рассматриваемой области этот предел достижим. Таким образом, с увеличением n переменное расстояние будет приближаться к конечной точке в заданных пределах, и мы определим соответствующий предел в виде суммы бесконечного ряда. По сути получается, что если отрезок является частью единицы, получено выражение, которое совпадает с бесконечным рядом, при условии, что этот ряд выражает определённую величину. Такое расширение чисел не вызывает возражений, если понимать число только как меру. Здесь мы не будем вдаваться в трудности различной природы, которые встречаются при реализации этой идеи. Если мы тем не менее чисто арифметическим способом прежде всего определим числовые величины, состоящие из конечного количества элементов, нет смысла говорить о границе, к которой мы приближаемся с увеличением количества элементов приближаемой числовой величины, потому что в описываемом случае таких, как правило, нет [11, с. 54]. А теперь обратимся к случаю, который представляет новую трудность. А именно, когда положительные и отрицательные элементы сами по себе не являются конечными или определёнными, так что нет представления о том, как ряд – в той форме, в которой по крайней мере он дан, может что-то собой выражать. Это неудобство легко преодолеть, преобразовав ряд к другому виду, в котором этого можно избежать. Для этого напомним, что теорема сформулирована для положительных и отрицательных элементов ряда, где сам по себе ряд из абсолютных величин имеет конечное значение. Поэтому как только ряд можно привести к так называемому *абсолютно суммируемому*, так его величина будет установлена. Теперь мы легко покажем условия, при которых данные ряды из положительных и отрицательных элементов могут быть преобразованы в один такой ряд. Как раз для абсолютно суммируемых рядов легко доказать, что $\lim\limits_{n=\infty}\left|s_{n+r}-s_n\right|=0$ для любого r, то есть изменение s_n при возрастающей точности (количества разрядов) будет сколь угодно малым. Теперь легко видеть, что это условие может быть выполнено с помощью положительных и отрицательных членов, образующих соответствующий ряд, без того, чтобы суммировать положительные и отрицательные члены, а вычисляя имеющиеся конечные значения, как например, в случае $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...$. Теперь мы хотим *расширить понятие числовой величины* с той точки зрения, что в каждом ряду, с помощью которого определяется соответствующая числовая величина, и о порядке (упорядоченности) в котором мы только что говорили, очерёдность элементов имеет важное значение. Теперь, если заданное условие выполняется, легко можно доказать следующее: сгруппируем, сохраняя очерёдность некоторого определённого количества элементов рассматриваемого ряда $a_1 + a_2 + a_3 +...$ в его совокупности, тогда образуется новый ряд $b_1 + b_2 +...$. Возможно ли сделать это преобразование произвольным числом способов, чтобы новый ряд был абсолютно суммируемым? Для того, чтобы это определение величины было безусловным, необходимо и достаточно, чтобы для всех способов преобразования получалась одна и та же величина. Абсолютно сходящиеся ряды сравнимы друг с другом в силу этой общей теоремы. Эта процедура производится следующим образом [11, с. 55]: пусть $a_1 + a_2 +...$ рассматриваемый ряд; и ряд $g_1 + g_2 +...$ состоящий только из положительных элементов, о которых известно, что они конечны, следовательно, $\lim\limits_{n=\infty} g_n = 0$. Сначала отделим некоторое количество элементов первого ряда таким образом, чтобы любое количество элементов остатка в сумме было бы меньше чем g_1. В силу нашего предположения можно так выбрать n, чтобы разность была $\left|s_{n+r}-s_n\right|<\delta$, для достижения указанной цели можно взять $\delta = g_1$. Это будут как раз $n = \alpha$ и $S_\alpha = b_1$. С оставшимися можно сделать поочередно то же самое, остальная часть этого ряда будет содержать произвольное количество элементов, сумма которых не превосходит g_2. Отделим от их суммы b_2. Продолжая таким образом, мы получим ряд из членов $b_1, b_2, ..., b_n$, где вообще говоря $|b_{\nu+1}| < g_\nu$.

Следовательно, $|b_2| + |b_3| + ... + |b_n| < \sum_1^{n-1} g_\nu$. С правой стороны в силу предположения, находится конечная величина, следовательно, и левая сторона тоже конечна, и тогда b_1 тоже конечна, а следовательно, и весь ряд при произвольном увеличении n тоже будет иметь конечное значение. Теперь покажем, что если мы выполняем те же операции другими способами, образуя ряды $c_1, c_2, c_3, ...$, их сумма будет иметь то же значение, что и в первом случае. Действительно, если ряд $= b_1 + b_2 + ... b_m + R_m$, то $|R_m| < g_{m-1} + g_m + g_{m+1} + ...$ и это может быть применено к $\sum g_\nu$, которую по предположению можно сделать произвольно малой при неограниченном увеличении m. Таков же ряд $= c_1 + c_2 + ... c_p \ + R'_p$. Пусть теперь ряд $b_1 + b_2 + ... b_m$ состоит из первых μ членов ряда $a_1 + a_2 + ...$ взятых в совокупности, так что они прежде всего $= S_\mu + R_m$, а затем $= S_\nu + R'_p$, если ν для c имеет тот же смысл, что и μ для b. Разность между двумя этими выражениями есть $= S_\mu - S_\nu + R_m - R'_p$ [11, с. 56].

Теперь можно увеличить m и p так, чтобы R_m и R'_p стали сколь угодно малыми, согласно предположению по поводу $S_\mu - S_\nu$. Таким образом, разность может быть сделана так мала, как это требуется, иными словами, имеется определённый набор положительных и отрицательных членов ряда с конечными значениями, поэтому с помощью этого построения можно получить любое количество *абсолютно суммируемых рядов*. Как видите, мы привели наши соображения о рядах без ограничений на общее понятие числовой величины, ими уже сейчас можно пользоваться, чтобы определить операции сложения, вычитания и т. д., здесь мы излагаем это сокращённо для того, чтобы заложить основу, приблизиться к обоснованию.

Среда, 9. 6. 1886

§ 6. Введение понятия переменной величины; доказательство основных теорем

Под *переменной величиной* понимаем величину, которая определяется посредством бесконечно многих величин, которые соответствуют данному определению. Так, например, сформируем в области чисел, созданных из основной единицы, такие числа, которые кратны основной единице, или переменные величины. Можно различать так называемые действительные и комплексные переменные, последние состоят из двух основных различных единиц, и в каждом отдельном случае нужно указывать, о расширении определения какого типа величин идёт речь. Обычно так называют только такие переменные величины, которые могут принимать бесконечное число значений; величина, которая вообще может принимать различные значения, уже является переменной. Назовём неограниченной переменной величиной по определению не имеющую абсолютно никаких ограничений. Такие ограничения на изменяемость могут быть сделаны различными способами, например, когда действительная переменная величина находится между двумя границами a и b, или когда комплексное значение ограничено в *соответствующим образом построенной* плоской области. С определением переменной величины связано понятие переменной *границы* (предельной точки). Проблема в том, какой арифметический смысл мы связываем с этим понятием [11, с. 57]. Пусть x переменная величина, и a – некоторая точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много определённых значений [переменной], тогда a является предельной точкой, если она сама не входит в её определение. Видимо, может быть несколько таких ограничений. Да, количество таких предельных точек может быть даже бесконечным, например, когда мы определяем такую переменную величину, которая может быть представлена бесконечным количеством переменных, составленных вместе, образованных из основной единицы и её частей. Тогда все рациональные величины будут определены, и в каждой окрестности любой *иррациональной числовой величины* находится произвольное сколь угодно большое количество рациональных числовых величин, сколь угодно близких к ней. Таким образом, любая иррациональная числовая величина является предельной точкой рациональной, то есть в данном случае определённой. Нужно ли определять разницу между рациональными и иррациональными величинами чисто арифметически? Если исходить из существования рациональных чисел, то нет никакого смысла определять иррациональные как пределы, потому что мы изначально не знаем, есть ли другие числовые величины, кроме рациональных. Только когда приходится иметь дело с расширением понятия величины,, можно говорить о границе отрезка, но только не с арифметической точки зрения. Но среди числовых величин, определённых нами выше, содержатся не только рациональные числа, но также и другие. Возьмём, к примеру, число *e*, состоящее из элементов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{n!}, ...$, это хорошо определённый ряд, который определяет конкретную числовую величину, тем не менее можно показать, что не существует рациональной числовой величины, которая равна ей по определению. Это показывает, что числовая область рациональных чисел не полна. Да, как исключение следует рассматривать тот случай, когда числовая величина, сформированная из бесконечного числа элементов, равна рациональной числовой величине. Изначально мы определяли рациональную числовую величину как составленную из конечного числа элементов составных величин, следовательно, мы можем представить её выраженной через кратные положительные или отрицательные части основной единицы. Из основной единицы и её частей образуются числовые величины так, что таким образом созданная область охватывает как рациональные, так и иррациональные числовые величины. Отметим, однако, что мы можем теперь рассматривать иррациональные числа как пределы переменных рассматриваемых рациональных величин. Так как ряд состоит из бесконечного числа элементов, мы всегда можем выделить достаточно элементов, чтобы остаток был меньше сколь угодно малой δ, так что существует бесконечно много рациональных чисел, сколь угодно близких к рассматриваемому иррациональному [11, с. 58]. Как только мы это покажем, признаем, что на основании упомянутого выше примера переменная величина может иметь бесконечно много предельных точек.

Теперь мы подходим к разработке теорем, которые нельзя рассматривать как самые важные в теории числовых величин, но в целом являющиеся необходимой основой для значительной части нашего исследования. Для ясности приведём пример. Рассмотрим два ряда:

$$g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \ldots in \inf.,$$

$$h_0(x) + h_1(x) + h_2(x) + \ldots in \inf.,$$

где $g_\nu(x)$ и $h_\nu(x)$ целые рациональные функции x, с произвольными, в том числе рациональными, коэффициентами. При рассмотрении этих рядов можно ограничиться действительными значениями аргумента, определённого между a и b. Можно, однако, распространить их на комплексные значения аргумента, во взаимосвязи частей всего построения. Эти ряды могут быть равны, и возникает вопрос, какое условие будет достаточным, чтобы для любой величины x из области [определения] эти ряды принимали бы одинаковые значения. Если возможно преобразование одного ряда в другой с помощью аналитических операций, это можно проверить, если доказать сходимость обоих рядов. Но бывают случаи, когда нельзя говорить о таком преобразовании, и тогда нужно выявить (проверить) равенство. Вопрос теперь в том, нельзя ли обойтись меньшим количеством условий, достаточных для определения этого равенства, например, для небольшого ряда значений x, чтобы потом придать им более общий характер. Например, ряд определён только в некоторой связной части области, тогда вопрос в том, нельзя ли из равенства значений функции вдоль линии в этой области сделать вывод о равенстве вдоль линии, проходящей по другим областям, в которых функция определена. Одно из таких доказательств на первый взгляд кажется чем-то очень сомнительным, на самом деле это введение нового понятия, а именно понятия *равномерной сходимости*. Мы уже ранее имели возможность познакомиться со смыслом и содержанием этого известного понятия, сейчас мы не будем на этом останавливаться. Достаточно сказать, что с недавнего времени оно характеризуется важной ролью во всех таких доказательствах. В конечном счёте доказательства по этому вопросу основываются на следующей теореме, которую мы сейчас сформулируем [11, с. 59]:

Пусть x – неограниченная переменная величина, которая, как говорится, образует одномерное многообразие, геометрически представляемое в виде прямой линии, и на ней определена другая переменная величина x' таким образом, что количество определённых (definierten) точек бесконечно, тогда в областях x, для которых x' определена, есть по крайней мере одна точка, в окрестности которой находится бесконечно много определённых (определяемых) точек. Такая точка может быть либо определена сама, либо нет; в последнем случае это будет «*предельная точка* (Grenzstelle)».

Кажется естественным воспринимать это как должное, эта теорема считается само собой разумеющейся. В самом деле, предположим сначала лишь то, что x' определена между конечными пределами a и b. Очевидно, что если вернуться к идее прямой и учесть то, что на конечном отрезке $a \ldots b$ находится бесконечно много определённых точек, то по крайней мере одна из точек рассматриваемого отрезка должна быть точкой сгущения (letztere sich ins Unbegrenzte häufen müssen). Но мы хотим дать здесь строгое доказательство теоремы. Мы ограничимся конечным интервалом (*a*, …, *a*+*d*). (Пусть, например, x' определён как $1/n^2$, где n пробегает все числа от 1 до ∞, тогда (*a* … *a*+*d*) = (0 … 1).) Разделим этот отрезок пополам. Тогда, в силу предположения, по крайней мере в одной из двух половин интервала находится бесконечно много x'. Из этих двух интервалов мы разделим первый на $\left(a....a+\frac{d}{2}\right)$ и $\left(a+\frac{d}{2}...a+d\right)$. Первый из этих интервалов, в котором расположено бесконечно много x', обозначим $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$, тогда $\varepsilon = 0$ или $= 1$. Примем во внимание также тот случай, когда в обеих частях интервала расположено бесконечно много x'. Итак, приступим. Разобьём интервал $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$ на два равных интервала $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+\varepsilon\frac{d}{2}+\frac{d}{4}\right)$ и $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}+\frac{d}{4}\ ...a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$. Первый из них, в котором лежит бесконечно много x', обозначим $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}+\varepsilon_1\frac{d}{4}\ ...\ a+\varepsilon\frac{d}{2}+(\varepsilon_1+1)\frac{d}{4}\right)$, где $\varepsilon_1 = 0$ или $= 1$. Продолжая эту процедуру, мы получим окончательный определённый ряд чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$, а затем (тогда) $a+\varepsilon\frac{d}{2}+\varepsilon_1\frac{d}{4}+...+\varepsilon_n\frac{d}{2^{n+1}}$ – это исходная точка первого интервала, в котором находится бесконечно много величин x'. Таким образом, этот интервал можно представить так: $\left(a+d\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)...a+d\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n+1}{2^{n+1}}\right)\right)$ [11, с. 60].

Пусть $a_n = a+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)d$; то есть внутри отрезка $\left(a_n....a_n+\frac{d}{2^{n+1}}\right)$ расположено бесконечно много определённых (definierten) чисел. Рассмотрим теперь ряд из элементов a_n, продолжающийся воображаемо бесконечно; затем получим $a' = a+\eta d$, где $\eta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{k+1}$.

Здесь η полностью известная (определённая) величина. Мы утверждаем, что a' есть точка, в окрестности которой плотно расположено бесконечно много определённых x'. Ибо мы можем сначала установить $a' = a_n + \eta' d$, где $\eta' d > 0$, и сделать η' произвольно малым. В интервале $\left(a_n \ldots a_n + \frac{d}{2^{n+1}}\right)$ расположено бесконечно много определённых (определяемых, definierten) значений x'. Таким образом, как только n определяется чтобы $\frac{d}{2^n} < g$, то величина x' такова, что отличается от a' менее, чем на g, потому что $\eta' d$ и подавно $<g$. Таким образом, теорема строго доказана.

Как видно, наше доказательство основано только на предположении о существовании величин ε_ν; это предположение является лишь логическим следствием двух условий: что существует бесконечно много определяемых x', и что они находятся в конечном интервале (a..... $a + d$). До сих пор мы доказывали эту теорему в предположении, что x' определён между конечными величинами; её легко можно распространить на тот случай, когда x' определён (definiert) от $-\infty$ до $+\infty$. Или потому что найдётся бесконечно много определённых x', превосходящих сколь угодно большую величину a, тогда применим нашу теорему к x', расположенному на бесконечности; в этом случае будем говорить, что $+\infty$ является предельной точкой для x', и то же самое соответственно относится к $-\infty$.

Пусть, наконец, в $(-\infty...+\infty)$ расположен конечный отрезок, о котором мы знаем, что в нём находится бесконечно много x', тогда мы легко сможем применить вышеизложенное доказательство [11, с. 61].

Пятница, 11. 6. 1886

Предельная точка a' в приведённых выше доказательствах играет важную роль, это определённая числовая величина, её можно дать в виде других разнообразных форм, не только делением пополам, но и делением на любое другое целое число. Главное здесь то, что существование этой числовой величины имеет арифметический смысл, так как она представима основной единицей и сколь угодно большим количеством её частей. Теперь перейдём к геометрической форме этой теоремы, которая сформулирована Больцано, хотя свидетельства об этом нельзя назвать очень строгими. Больцано выражается примерно так: предположим, что на некоторой линии *AB* имеются точки, обладающие некоторыми свойствами, определённые каким-то образом. Как известно, если определена какая-нибудь точка *C*, определены точки, расположенные между *A* и *C*, то известно также, что в *AB* обязательно имеются точки, которые не могут быть определены. В этих условиях должна найтись точка *D* с таким свойством, что все точки, лежащие между *A* и *D*, относятся к определённым, а все точки, лежащие между *D* и *B*, не являются определёнными. Остаётся открытым вопрос, принадлежит ли *D* к определённым точкам, или нет. Больцано основал своё доказательство на том, что для положения точки *D* найдётся числовая величина, как это делали мы раньше, но тому, что любая созданная числовая величина соответствует точке, нет никаких доказательств. Нам будет достаточно доказать теорему следующим образом: предположим, что если *C* относится к определённым точкам, то и каждая точка между *A* и *C* тоже будет таковой. Это означает ни что иное, как то, что эти точки, как здесь предполагается, образуют непрерывную последовательность, и тогда ясно, что если две точки *C* и *C′* не являются определёнными, ни одна точка между *C* и *C′* не будет определённой. Поскольку не все точки между *A* и *B* являются определёнными, то ясно, что и без определённых точек можно образовать непрерывную последовательность. Таким образом, точка *C* относится к последнему классу, так что все точки отрезка *CB* тоже к нему принадлежат.

Оба типа должны вместе заполнять отрезок *AB*, то, что мы имеем дело с установленными условиями, нельзя представить иначе, нежели два непрерывных отрезка, которые относятся к обоим классам точек, разделённых точкой *D*. На самом деле мы считаем, что обычные понятия точки и прямой настолько несомненны, что против вышеизложенного нет никаких возражений. Поэтому определим положение точки *D* так, чтобы оно как-то согласовывалось с нашим врождённым, естественным понятием предела, после чего мы можем представить себе, что прямая не ограничена ничем, кроме точек, так что можно предположить, что *D* представляет собой определённую величину [11, с. 62]. Тогда будут согласованы оба метода доказательства. Кстати, мы не делаем особого акцента на том или другом из этих видов доказательств, задача основной леммы состоит в том, чтобы установить смысл. Это связано с тем обстоятельством, на которое мы уже неоднократно обращали внимание, предполагая, что по условию на отрезке *AB* с назначенной единицей длины имеется точка *C*, которая представляет собой числовую величину, обратное не является очевидным, а именно то, что любая числовая величина соответствует точке. По крайней мере не исключена возможность, что вся совокупность положительных числовых величин является чем-то всеобъемлющим, нежели вся совокупность всех возможных отрезков от A в направлении AB. Привлекая геометрическую интуицию, приведём вспомогательный способ для лёгкого объяснения того, что каждой определённой числовой величине соответствует геометрический отрезок. Мы считаем, что названная числовая величина, представленная в какой-нибудь арифметической форме, например, в десятичной системе в виде $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+....$, где $0\leq a_k<10$, когда $k\geq1$, может представлять на отрезке любую числовую величину, которая возникает в вышеприведённом выражении ряда первой, второй и так далее. Прерывая выделение элементов, мы определим таким образом бесконечно много числовых величин, к которым можно применить нашу теорему, и очень легко показать, что определённые выше выражения и являются числовыми величинами, в окрестности которых сгущено бесконечно много определённых точек. Это и подтверждает, что действительно изображена точка (положение), которая представляет приведённую выше числовую величину. Вопрос только в том, как вообразить себе эту предельную точку, если основываться на ходе мыслей Больцано. Теперь это делается следующим образом: мы уже определили понятия «больше» и «меньше» для наших числовых величин, а также и для отрезков, соответствующих числовым величинам, меньшим, чем рассматриваемая числовая величина. Если C – точка второго типа, то все точки между A и C будут точками этого типа, образующими непрерывную последовательность точек этого типа. То же самое можно сказать и о концевых точках отрезков, которые представляют числовые значения, большие чем рассматриваемая числовая величина. Таким образом, должна быть одна и только одна точка отделения двух отрезков друг от друга, и этой точкой является рассматриваемая числовая величина [11, с. 64]. Благодаря тому, что мы обстоятельно разобрали вышеизложенное утверждение, сейчас можем сделать обобщение. Мы сможем перейти от рассмотрения отдельных переменных величин к рассмотрению систем таковых. В аналитической геометрии на плоскости, соответственно в пространстве, каждая точка характеризуется двумя или соответственно тремя величинами, которые могут принимать все действительные значения. Можно рассматривать эти переменные как связанные с различными единицами. Система n различных величин называется определённой системой значений точки в области этой величины и совокупностью всех точек *n-кратного* *многообразия*. При конкретном рассмотрении таких n-кратных многообразий необходимо сначала установить порядок следования величин, как при некотором заданном значении первая величина относится к первой переменной, вторая ко второй переменной и так далее. Здесь не предвидится никаких затруднений, если мы обратимся к системе переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, понимая под $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *точку в этом многообразии.* Отметим, что мы можем сформулировать следующую теорему:

Предположим, что в n-кратном точечном многообразии, определённым произвольным образом, однако так, что этому определению отвечает бесконечно много точек, имеется по крайней мере одна точка, в непосредственной окрестности которой сосредоточено бесконечно много определённых точек. Рассмотрим совокупность всех точек, образованных, когда x_1 может принимать все значения от $a_1 - d$ до $a_1 + d$, x_2 может принимать все значения от $a_2 - d$ до $a_2 + d$ и так далее, и мы полагаем, что таким образом можно сформировать все возможные числовые комбинации n величин *окрестности* точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, таким образом мы утверждаем, что если d является сколь угодно малым, то в каждой сколь угодно малой окрестности по крайней мере одной точки существует бесконечно много точек, удовлетворяющих определению.

Первое утверждение очевидно только в том случае, если все рассматриваемые точки выражаются конечно, то есть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, абсолютное значение не превышает определённых пределов. Это легко обобщить на тот случай, когда граничная точка находится на бесконечности. Доказательство совершенно аналогично приведённому в соответствующей теореме для однократного многообразия.

Теперь можно обобщить теорему на n-кратное многообразие комплексных величин. Собственно говоря, мы имеем дело с $2n$-кратным многообразием, а именно с $2n$-кратным многообразием действительных величин в обычном смысле, так что легко распространить теорему на более широкую область значений [11, с. 64].

Теперь есть возможность определить окрестность точки $(a_1, \ldots, a_n)$ в области n-кратного многообразия действительных переменных через неравенства $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \leq d$, таким образом для n-кратного комплексного многообразия величин вида $x_k = \xi_k + \eta_k i,\ k = 1, 2, \ldots, n$ будет $\sqrt{\sum_1^n (\xi_k - a_k)^2 + \sum_1^n (\eta_k - b_k)^2} \leq d.$

Величина d называется радиусом окрестности рассматриваемой точки (a_1,..., a_n), это выражение для пространства переносится на произвольные n-кратные многообразия.

Теперь возможны два подхода: либо мы относим к определённым такую точку, в каждой окрестности которой находится бесконечно много определённых точек, либо нет. В последнем случае будем называть её предельной точкой.

Вторник, 22. 6. 1886

Перейдём теперь к определению *континуума* в n-кратном многообразии. Это легко определить пока мы остаёмся в простом многообразии, но для n-кратного многообразия требуется отчётливое изложение. Рассмотрим, например, функцию двух независимых переменных, они могут иметь неограниченное изменение на всей неограниченной плоскости, или быть ограниченными в какой-то определённой области. Это то, что обычно рассматривают как часть плоскости, но это не совсем подходящий способ выражения, как видно, так как часто исключаются отдельные точки плоскости. Давайте теперь исключим из плоскости несколько точек. Мы всегда сможем перейти от одной неисключённой точки к другой такой же непрерывным связным путём; да, мы всегда можем выделить такую часть плоскости, которая соединяет две точки одну с другой. Последнего мы можем достичь с помощью последовательности кругов, таких, что центр следующего круга лежит внутри предыдущего круга, а радиусы выбраны так, что все исключённые точки останутся снаружи [11, с. 65]. В ином случае, когда количество исключённых точек бесконечно велико, нет необходимости строить линию. Например, исключённые точки лежат на окружности таким образом, что, когда u' в каком-либо направлении из произвольной начальной точки проецируется на дугу, и этот круг имеет единичный радиус, для $u' = 2\xi\pi$, где ξ пробегает все рациональные значения от 0 до 1, тем самым устраняется определённая часть плоскости без точек, непрерывно расположенных на линии. Прежде всего внутри круга не содержится исключённых точек, возьмём одну из них в качестве центра круга, все точки которого должны быть определены; можно убедиться, что его радиус не превышает определённого предела; вновь возьмём в круге новую точку и очертим вокруг неё круг, так же, как вокруг первой точки, может оказаться, что если неограниченно продолжать эту процедуру, мы никогда не выйдем из внутренней области, через исключённые точки, ограничивающие круг, за пределы круга, подобно тому, как точка извне никогда не сможет попасть в круг. Таким образом, мы видим, что никакой непрерывной последовательности точек недостаточно для разложения двумерного многообразия на части. Как мы видим из примера, даже априорно невозможно определить виды разложения плоскости на части.

Теперь перейдём к рассмотрению n-кратного многообразия; мы можем определить его как множество определённых точек, и поговорим об основной теореме, подробное обоснование которой у нас было для случая простого многообразия. Точечное множество называется *замкнутым*, если любая окрестность каждой из его определённых точек содержит бесконечно много определённых точек. Если мы определим, например, все точки круговой области, то каждая точка окружности определена и одновременно является граничной, в то время как за пределами круговой области не найдётся ни одной точки, про которую можно сказать, что в любой её малой окрестности находятся определённые точки. Теперь мы можем сделать любое точечное множество P замкнутым, причислив к нему его пограничные (предельные) точки P'. Полагая, что точка не принадлежит ни к P, ни к P', мы можем в любом случае описать вокруг неё круг конечного радиуса, не содержащий P, в противном случае он содержал бы P' [11, с. 66]. Но он также не может содержать и P', потому что, по определению, в P' содержится бесконечно много точек P.

С помощью такого замкнутого точечного множества мы сейчас или выделим из n-кратного многообразия *один* континуум, *или несколько*, находящихся на расстоянии друг от друга. Пусть дана точка A, не принадлежащая множеству точек, мы можем окружить её окрестностью такого радиуса ρ, что в неё не попадут определённые (definierten) точки; ρ является переменной величиной, имеющей верхнюю границу в том смысле, что принимает любые меньшие значения. *Абсолютной окрестностью A* будет такая, чей радиус ρ_0 и является этим верхним пределом. Отправляясь из точки A, построим последовательность точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таким образом, что каждая последующая содержится в окрестности предыдущей. Далее возможны два случая: либо мы приходим из A в любую точку, не принадлежащую точечному множеству P, либо нет. В первом случае все те точки, которые не входили в точечное множество P, образуют один континуум, во втором случае в силу нашего предположения точка A всего лишь определяет оставшуюся после исключения P часть n-кратного многообразия. Выберем теперь в оставшейся части n-кратного многообразия точку B, так, чтобы благодаря ей вновь определить в нём новый континуум. Таким образом, мы видим, что в силу определения точечного множества n-кратное многообразие может быть разделено на бесконечно много частей.

Теперь возникает вопрос, будут ли две точки, изначально принадлежащие одному и тому же определённому континууму, всегда приводить к этому континууму или нет. Чтобы ответить на этот вопрос, представим, что между A и B находится последовательность таких точек, что мы можем перейти по ним из A в B, причём каждая следующая точка находится в окрестности предыдущей. Тогда сразу получается, что из A можно достичь всех точек, в которые мы можем попасть из B, потому что мы просто после B сможем попасть в A. Не совсем ясно, как из B мы сможем достичь всех точек, достижимых из A. Чтобы показать это, нужно доказать, что из B можно вернуться в A, а именно, что выйдя из B к A, можно пройти через все точки, достижимые из A. Для того, чтобы доказать это, соединим A и B последовательностью точек, которые смогут обеспечить переход от A к B [11, с. 67]. Соединим эти точки ломаной линией; то есть $A_{n-1}A_n$ полностью в окрестности A_{n-1} и так далее. Пусть эта линия проходит через точку так, чтобы каждому положению соответствовал *абсолютный радиус окрестности* ρ, являющийся переменной величиной и имеющий нижний предел, не равный нулю; и если мы применим принцип классификации, который использовали в доказательстве основной теоремы, то прежде всего получим, что нужно попасть в одно или несколько **конкретных** мест, для которых фактически достигается нижняя граница. Но во всякой ли точке ломаной линии ρ имеет конечное значение, потому что иначе упомянутое место (точка) является предельной точкой для A, то есть принадлежит точечному множеству P, так что можно использовать его как любое продолжение континуума.

Мы хотим представить другое доказательство, которое основано на следующем предложении. Если две точки A и B находятся на расстоянии δ, и ρ это радиус окрестности A, тогда между $\rho - \delta$ и $\rho + \delta$ существует ρ', радиус окрестности B. Теперь можно выбрать ρ настолько малым, чтобы разность между $\rho - \delta$ и $\rho + \delta$ была сколь угодно мала. Пусть точка пробегает отрезок от A_1 до A_n, тогда соответствующее значение ρ достигнет своей наименьшей величины, не равной нулю, как мы оговаривали выше. Пусть точка пробегает отрезок в обратном направлении $A_n, A_{n-1},..., A_1$, выберем расстояние $A_{\nu-1}A_\nu$ настолько малым, чтобы как A_ν лежало в окрестности $A_{\nu-1}$, так и $A_{\nu-1}$ лежало в окрестности A_ν, что получится, если $A_{\nu-1}A_\nu < \frac{1}{2}\rho$; это тот самый радиус окрестности A_ν, о котором мы говорили, что он $> \frac{1}{2}\rho$, $A_{\nu-1}$ таким образом попадает в окружность, описанную вокруг A_ν. Если мы выберем промежуточные точки таким образом, чтобы все расстояния между ними были $< \frac{1}{2}\rho_0$, где ρ_0 есть нижняя граница ρ, то мы уверены, что можно вернуться из A_n в A_1, о чём говорилось выше, то есть из всякой точки мы можем попасть только в те точки, которые принадлежат континууму, и это в самом деле так, иначе говоря, точка может принадлежать только континууму, что и доказано полностью.

Среда, 23. 6. 1886

Эта теорема прежде всего применима к плоскости, то есть к двумерному многообразию, и теперь наша задача продолжить доказательство на произвольное n-кратное многообразие [11, с. 68]. Здесь мы будем использовать геометрические выражения, приведённые к следующему виду: пусть $x_k = a_k + t(b_k - a_k)$, $(k = 1,...,n)$, где t – это неограниченная действительная переменная, тогда назовём совокупностью точек (Gesamtheit der Stellen) $(x_1, x_2,..., x_n)$, удовлетворяющих этому выражению, *линию* в соответствующем многообразии. Основания для такого названия не нуждаются в комментарии. Совокупность значений системы $(x_1, x_2,..., x_n)$, которые следуют из этого выражения, когда t принимает значения от 0 до 1, называется *отрезком*. Придавая t значения >1, получим продолжение отрезка ab за пределы b, придавая t отрицательные значения, получим продолжение за пределы a. Выражение $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2}$ называется расстоянием точки b до точки a. Если оно = r, мы понимаем под окрестностью точки a радиуса r совокупность всех значений системы, для которых $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2} < r$.

Докажем теперь теорему, которая является прямым обобщением предыдущего утверждения для пространства.

Если a, b, c – три точки пространства, то $ac < ab + bc$, если они не лежат на одной прямой. Теперь пусть c изменяется, но так, чтобы bc всегда имело одно и то же значение, так что есть положения, при которых ac достигает максимума, и такие, при которых ac является минимальным. Для n-кратного многообразия эта теорема звучит следующим образом:

Если a, b, x три точки, то $ax < ab + bx$ или $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} < \sqrt{\sum(b_\lambda - a_\lambda)^2} + \sqrt{\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2}$, кроме тех случаев, когда $x_\lambda = a_\lambda + t(b_\lambda - a_\lambda)$. В последнем случае из приведённого выше неравенства получается уравнение. Теперь мы можем доказать это чисто алгебраически, но поступим сначала следующим образом [11, с. 69]. Пусть a, b фиксированы, x – переменная, но такая, что bx имеет постоянное значение ρ, так что сначала нужно показать, что существует точка, для которой $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} = R$ есть максимум, и другая точка, для которой R является минимумом. Также должно выполняться $\sum(b_\lambda - a_\lambda)^2 = r^2$. Будем действовать обычным образом и составим выражение $\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2 - \varepsilon\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2$, оно должно принимать минимальное или максимальное значение. Домножим слагаемое на неопределённую постоянную ε, потому что эта задача сродни *вариационному исчислению*. Таким образом, мы имеем систему уравнений $(x_\lambda - a_\lambda) - \varepsilon(x_\lambda - b_\lambda) = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots, n)$ или $x_\lambda - a_\lambda = -\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(b_\lambda - a_\lambda)$, что доказывает, что искомые точки действительно лежат на линии. Дальше получаем $R = \pm\varepsilon\rho = \pm\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}r$, а также $\varepsilon = 1 \pm \dfrac{r}{\rho}$.

Таким образом, получаем две точки, и не больше, удовлетворяющих требуемому. Тогда в первом случае $R = \left(1 + \dfrac{r}{\rho}\right)\rho = r + \rho$, во втором $R = \left(\dfrac{r}{\rho} - 1\right)\rho = r - \rho$. По сути, мы имеем в одном случае максимум, в другом минимум, так что фактически в остальных случаях $ax < ab + bx$. Эта теорема послужит основой доказательств наших теорем для n-кратных многообразий.

Пусть в замкнутом многообразии дано замкнутое точечное множество, но так, что есть точки, не принадлежащие ему. Тогда для каждой точки, которая ему не принадлежит, безусловно, определена окрестность. Наверняка точки множества P не лежат в произвольной близости к упомянутым точкам, то есть может быть точка, обозначенная a, с окрестностью радиуса ρ, внутри которой нет точек из P . Несомненно, этот радиус не превышает конечного предела r, то есть окрестность r определена так, что при небольшом увеличении в неё попадёт точка P. Взяв в окрестности точки a некоторую точку b, можно показать, что, когда $ab = d$, радиус окрестности b не меньше чем $r - d$ и не больше, чем $r + d$ [11, с. 70]. Если c является точкой из окрестности b, то в силу только что доказанной теоремы прежде всего $ab + bc > ac$ или $bc > r - d$, а также $bc < ab + ac$, $bc < r + d$, что и требовалось доказать. Во второй части c означает точку, которая находится на границе окрестности b, расположенной в окрестности a. Итак, мы можем сформулировать следующее определение: если в окрестности точки a содержится точка b, в окрестности точки b содержится точка c и так далее, то любая точка s, по которой мы можем перейти из a в c, называется *связной* (смежной) с точкой a. Покажем, что если s связано с a, то и a связано с s.

Пусть в окрестности точки a лежит точка b, так что $ab<\frac{1}{2}r$, где r – это окрестность точки a, тогда радиус окрестности точки b будет в силу доказанной теоремы $>\frac{1}{2}r$. Соединим ab отрезком прямой, тогда для любой точки всегда определена такая окрестность, которая $> r - d$, как только $ab = d$, нам нужно лишь – что возможно всегда – соединить a и b последовательностью точек такого рода, что при переходе от a к b каждая точка всегда лежала бы в окрестности предыдущей, чтобы быть уверенным, что из b в a можно вернуться обратно, но это всегда возможно, потому что расстояние между точками $< r - d$. Но a связано с b, и мы можем из b попасть в любую точку, в которую можно попасть из a, значит нужно отправиться из b через a.

Пятница, 25. 6. 1886

Теперь поставим вопрос о создании концепции *границ континуума*. А именно, могут ли все точки многообразия принадлежать континууму, или нет, в последнем случае тогда должны существовать точки, в произвольной близости к которым находятся как точки, принадлежащие континууму, так и не принадлежащие ему. Совокупность этих точек мы будем называть **границей (пределом)** континуума [11, с. 71]. Это и есть наиболее возможное многообразие, на плоскости ограничителем может быть единственная точка, бесконечное количество точек, расположенных дискретно, и, наконец, непрерывный контур. Нам нужно доказать две вещи: 1) что за исключением упомянутого плоского случая в континууме имеются предельные точки; 2) что всё это можно найти в замкнутом точечном множестве, с помощью которого мы с самого начала определяли континуум. Совсем не обязательно, чтобы все точки, принадлежащие замкнутому множеству точек, были предельными; например, определим в пространстве замкнутое множество с помощью точек, которые находятся внутри сферы или на её поверхности, то в этом смысле, если отделить от шара континуум его граничных точек, тогда оставшиеся внутренние точки сферы уже не будут замкнутым точечным множеством.

Поэтому сначала нужно доказать существование предельных точек. Пусть a – это точка внутри континуума, b это любая другая точка; по ранее данному определению n-кратного многообразия $x_\lambda = a_\lambda + t(b_\lambda - a_\lambda)$, $(\lambda = 1, \ldots, n)$, где t принимает все положительные и отрицательные действительные значения, a и b соединены прямой линией. Теперь пусть τ – произвольная положительная величина, такая, что при подстановке её вместо t в выражения для координат отрезка получается точка P этого отрезка, лежащая в континууме, и такая, что все точки от a до неё принадлежат отрезку континуума, тогда расстояние aP имеет переменную величину и как таковой имеет верхнюю границу. Если оно будет бесконечно большим, тогда все точки прямой принадлежат континууму; если нет, то для P_0 должно быть предельное положение для P, в этом случае P_0 будет просто границей для P, как это следует из его определения. Отрезки, для которых такие предельные точки P_0 действительно существуют, должны быть в любом случае; в самом деле, нужно взять какую-нибудь точку, для которой в континууме определено точечное множество, связанное с a; разумеется, эта точка является точкой класса P_0, иначе на отрезке не было бы точек, предшествующих ей в соединении с точкой a, то есть соответствующих меньшей величине t [11, с. 72].

И наконец, легко видеть, что все граничные точки принадлежат замкнутому множеству; так как любая точка, не принадлежащая точечному множеству, принадлежит континууму, или, если многообразие расположено в точечных множествах в нескольких континуумах, то одному из этих континуумов.

Такой континуум, как только что описанный, назовём *незамкнутым континуумом*; мы думаем, что если мы добавим к нему все предельные точки, то получим структуру, которую вправе называть *замкнутым континуумом*. На самом деле тот континуум, что мы определили раньше, и есть замкнутое множество.

§ 7. Равномерная непрерывность (Gleichmäßige Stetigkeit)

Определим теперь функцию n переменных $(u_1, u_2,..., u_n)$ для незамкнутого континуума, что не исключает того, что всё n-кратное многообразие образует континуум. Границы континуума мы, однако, использовали в случае функции одной переменной, где это определялось для всех значений от $-\infty$ до $+\infty$, или между a и b, и было неясно, имеет ли смысл функция в этих граничных точках. Если любой системе значений $(u_1, u_2,..., u_n)$ соответствует одно и только одно значение x функции, назовём её *однозначной функцией* переменных $(u_1, u_2,..., u_n)$. Такое определение само по себе немного значит; оно станет плодотворным для анализа после введения понятия *непрерывности*. Понятие непрерывности определяется обычно так: функция x от $(u_1, u_2,..., u_n)$ непрерывна в окрестности точки $a = (a_1,..., a_n)$, если для сколь угодно малой положительной величины ε всегда можно определить такое δ, что $|x - b| < \varepsilon$, если $|u_\lambda - a_\lambda| < \delta \ (\lambda = 1, 2, ..., n)$, где b – это значение, которое x принимает в $(a_1,..., a_n)$. Другими словами, мы можем охарактеризовать непрерывность как факт того, что после принятия ε можно определить такую окрестность ρ для определённого a, что $|x - b| < \varepsilon$, при $\sum_1^n (u_\lambda - a_\lambda)^2 < \rho^2$; оба этих определения согласуются друг с другом и не нуждаются в доработке [11, с. 73]. Наконец, правильное представление о бесконечно малом позволяет определить непрерывность функции в окрестности точки a так, что бесконечно малые изменения аргумента должны соответствовать бесконечно малым изменениям функции в окрестности точки a. Это определение легко можно распространить на случай, когда функция определена не только для тех точек континуума, определяемых как $(u_1, u_2,..., u_n)$, но и на всех точках вообще.

От непрерывности функции перейдём к другой непрерывности, которая является её частным случаем и нередко упускаемой из виду; я имею в виду понятие *равномерной непрерывности*. Функция называется равномерно непрерывной в определённом интервале $(a...b)$, если можно указать произвольно малое положительное ε, по которому определить такую величину

δ, что выполняется неравенство $|f(u') - f(u)| < \varepsilon$, когда $|u' - u| < \delta$, для любого количества пар значений u и u' в интервале $(a...b)$. Как уже упоминалось, эта равномерная непрерывность есть следствие непрерывности вообще, и доказательство, предлагаемое нами для функции одной переменной, может без существенных изменений быть распространено на функции нескольких переменных. Это доказательство основано прежде всего на подробно обоснованной основной теореме из учения о величинах. Возьмём простое многообразие, которое получается, если переменная величина u принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, и разделим его на интервалы таким образом: возьмём положительное число n, и величину μ, которая пробегает все положительные и отрицательные целочисленные значения, и образуем интервалы $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm\infty)$. Тогда каждое значение u будет принадлежать одному из интервалов, а именно, u должно принадлежать интервалу $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$, когда $\frac{\mu}{n} \leq u \leq \frac{\mu+1}{n}$. Теперь придадим n и μ такие значения, чтобы u лежало в определённом интервале, для которых определена функция. Этому интервалу соответствуют значения $f(u)$, расположенные между верхним и нижним пределами g и g', так что $g - g'$ – это *наибольшее изменение* (колебание) значений функции внутри этого интервала, и отсюда следует представление $|f(u') - f(u'')| < g - g'$, когда u' и u'' это две любых точки в интервале значений аргумента; $|f(u') - f(u'')|$, где u' и u'' лежат в интервале $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$, является положительной переменной величиной с верхней границей $g - g'$ [11, с. 74]. Рассмотрим совокупность интервалов $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm\infty)$, и оставим только те из них, на которых функция вообще определена. Определим в каждом из интервалов наибольшее изменение и выберем самое большое из них, которое обозначим $= g_n$. Очевидно, g_n имеет переменную величину. Неважно, что там может быть несколько μ, так как в интервале $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$ изменение достигает максимального значения g_n. Таких интервалов $\left(\frac{\mu}{n}...\frac{\mu+1}{n}\right)$ бесконечно много, так как n может принимать бесконечно много значений. Чтобы в этом убедиться, возьмём, например, в качестве n только значения простых чисел, тогда каждый интервал достоверно появится один раз, следовательно, так как количество простых чисел бесконечно велико, это в данном случае даст бесконечно много описанных выше интервалов. Сейчас такой интервал полностью определяется точкой μ/n, и в силу основной теоремы учения о величинах должна быть хотя бы одна точка, в непосредственной близости к которой произвольно накапливаются определённые точки μ/n. Если таких точек несколько, выберем одну из них и обозначим её u_0. Далее возьмём произвольно малый ε, и так как по предположению функция вблизи u_0 изменяется непрерывно, то мы можем определить величину δ так, что $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$, когда $|u-u_0|<\delta$. Рассмотрим теперь интервал ($u_0-\delta \ldots u_0-\delta$), в любой близости u_0 находится бесконечно много точек вида μ/n, а отсюда следует, что как μ/n, так и $\frac{\mu+1}{n}$ можно определить, чтобы $\left(\frac{\mu}{n}\ldots\frac{\mu+1}{n}\right)$ лежал в пределах ($u_0-\delta \ldots u_0-\delta$). Это очевидно, нужно лишь выбрать n сколь угодно большим. Однако тогда в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\ldots\frac{\mu+1}{n}\right)$ разность между двумя значениями аргумента, один из которых $= u_0$, достоверно будет $<\delta$; следовательно, после того, как установлено, что $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$, и так как, когда u' и u'' – значения аргумента, соответствующие наименьшему и наибольшему значению $f(u)$ в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\ldots\frac{\mu+1}{n}\right)$, тогда получается $|f(u')-f(u'')|<2\varepsilon$, то есть $g_n<2\varepsilon$. Так как во всех остальных интервалах $\left(\frac{\mu'}{n}\ldots\frac{\mu'+1}{n}\right)$ наибольшее значение колебания меньше или равно g_n, отсюда следует, что разница между двумя любыми значениями функции, соответствующими значениям аргументов из этих интервалов, будет меньше, чем произвольно малая принятая величина 2ε. Таким образом, теорема доказана, мы показали, что область переменной u можно разделить на такие интервалы, что в каждом из них разность между двумя любыми значениями функции будет меньше, чем назначенная произвольно малая величина. Таким образом, для того, чтобы $|f(u')-f(u'')|<\varepsilon$, при условии $|u'-u''|<\delta$, нужно выбрать такое n, чтобы при $g_n<\frac{1}{2}\varepsilon$, выполнялось наше требование $\delta<\frac{1}{n}$ [11, с. 75]. И даже если

u' и u'' лежат в двух последовательных интервалах, что представляет собой единственный оставшийся случай, то есть если u' и u'' не лежат в одном интервале, всегда должно выполняться $|u' - u''| < \frac{1}{n}$, даже в этом случае по-прежнему $|f(u') - f(u'')| < 2\varepsilon$, и 2ε вместе с ε конечно может быть сделан сколь угодно малым.

Теорема доказана полностью, *равномерная непрерывность* была получена как *частный случай общей непрерывности*.

Важность этой теоремы состоит в том, что она распространяется дальше, на специальные функции, чья непрерывность установлена, но мы не будем доказывать их равномерную непрерывность, потому что это весьма утомительно [11, с. 76].

[Далее то же для функции нескольких переменных].

Литература к VIII главе

1. *Вейерштрасс К.* Речь, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года / К. Вейерштрасс // УФН. – 1999 г. – Т., 169. – № 12. – С. 1325–1328.

2. *Kaestner A .G.* Angfangsgründe der Analysis endlicher grössen / A. G. Kaestner – Göttingen., 1794. – 590 s.

3. *Cauchy A.* Course d’analyse de l’Ecole rouale polytechnique. Premiere partie: Analyse algébrique // Oeuvres complètes. – S. 2. T. 3. – Paris, 1882–1974. – 471 s.

4. *Méray, Ch.* Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat., 1869. – (2) 4. – P. 280–289.

5. *Méray, Ch.* Nouveau précis d’analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication : F. Savy. – XXIII. – Paris, 1872. – 310 p.

6. *Cantor G.* Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen // Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann. – Bd. 5.

7. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre / Heine E // J. reine angew. Math., 1872. – 74. – S. 172–188.

8. *Dedekind R.* Stetigkeit und irrationale Zahlen. – Braunschweig: Vieweg, – 1872.

9. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М., 1985. – С. 356.

10. *Więsław W.* Matematyka i jej Historja / W. Więsław. – Opole, 1997. – 416 s.

11. *Weierstrass K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei

weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. – Teubner. –Archiv für mathematic. Band 9. – 272 s. Reprint, 1989.

12. *Kossak E.* Die Elemente der Arithmetik / E. Kossak. – Berlin, 1872.

13. *Пуанкаре А.* Математика и логика (1905–1906) / А. Пуанкаре // Новые идеи в математике. – Петроград, 1915 – № 10. – С. 1–52, 116–148.

14. *Пуанкаре А.* Наука и метод / А. Пуанкаре. – М.: Наука. – 1983.

15. *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений в трёх томах. – М.: АН СССР. – Т. 1. – 1953. – 400 с. – Т. 2. – 1958. – 744 с. – Т. 3. – 1959. – 508 с.

16. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. / Ф. А. Медведев. – М.: Наука, 1976. – 232 с.

17. *Рыхлик К*. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1958. – XI. – С. 515–532.

Глава IX. ГЕНРИХ ЭДВАРД ГЕЙНЕ И ЕГО ПОНЯТИЕ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ. ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Научная биография

Рис. 1. Генрих Эдвард Гейне

Генрих Эдвард Гейне (1821–1881) – немецкий математик, член-корреспондент Берлинской Академии наук, член Геттингенского научного общества. Коллега и во многом соратник Кантора. Представитель школы Вейерштрасса. Основные работы Гейне написаны в области теории потенциала, теории функций и теории дифференциальных уравнений. Мы расскажем о нём подробнее, так как на русском языке о нём написано очень мало.

Генрих Эдвард Симон Гейне[58] родился в Берлине 15 марта 1821 года в семье торговца и банкира Карла Генриха Гейне и Генриэтты Мартен,

---

[58] Биографический материал изложен по статье [2].

был восьмым из девятерых детей. Семья Гейне была в родстве с семьёй Мендельсон-Бартольди [1]. Таким образом, Гейне в 1831 году стал родственником Петера Лежёна-Дирихле, женившегося на сестре композитора Феликса Мендельсона Ребекке. Сам Гейне часто упоминал, что является двоюродным братом поэта Генриха Гейне (1797–1856), но по данным Института Генриха Гейне в Дюссельдорфе, это не так (заключение было сделано в первой половине XX века). В 1825 году был окрещён в лютеранскую веру. Сначала получал домашнее обучение, затем учился в гимназии Friedrichswerdersche, а потом в гимназии Köllnische в Берлине, где уровень преподавания математики и естественных наук был выше, и которую закончил в 1838 году.

Осенью того же года Гейне поступил в университет Гумбольда в Берлине. После одного семестра в Берлине он в течение трёх семестров учился в университете Геттингена, где слушал лекции К. Гаусса (1777–1855) и М.А. Штерна (1807–1894) по теории чисел. Вернувшись в университет Берлина в 1840, Гейне слушал лекции П. Лежён-Дирихле (1805–1859), лекции по геометрии Я. Штейнера (1796–1863) и по астрономии Иоганна Франца Энке (1791–1865), директора обсерватории. Ещё студентом он заинтересовался исследованиями К. Вейерштрасса (1815–1897), Э. Куммера (1810–1893), Л. Кронекера (1823–1891) и К. Борхардта (1817–1880), в течение всей жизни поддерживал контакты с этими математиками, неоднократно приезжая в Берлин. В 1842 году закончил университет в Берлине, выполнив научную работу под руководством П. Лежёна-Дирихле. 30 апреля 1842 года Гейне представил свою диссертацию «О некоторых дифференциальных уравнениях» (De aequationibus nonnullis differentialibus). Экспертами были Э. Дирксен (1788–1850) и М. Ом (1792–1872).

Он называл своим учителем Лежёна-Дирихле, заинтересовавшего его вопросами анализа. Общение с ним и другими математиками Берлина, прежде всего с Вейерштрассом, Куммером и Кронекером, сформировали направление его исследований.

После 1842 года он провёл год (два семестра) в университете Альбертина в Кёнигсберге под руководством К. Якоби (1804–1851) и физика-теоретика Ф. Нойманна (1798–1895), участвуя в работе математического семинара вместе с Г. Кирхгофом (1824–1887), З. Аронхольдом (1819–1884) и Ф. Зейделем (1821–1896). Лекции читались не только на немецком, но и на английском и испанском языках.

Aufstellung der
Differentialgleichungen,
von denen die Probleme der Mechanik abhängen.

Vorlesungsheft
von
E. Heine
aus dem Jahre
1842/43.

Рис. 2. Титульная страница конспекта лекций Гейне по дифференциальным уравнениям, связанным с задачами механики. Этот курс был прочитан К. Якоби и Ф. Нойманном в зимнем семестре 1842/1843

В 1843 году в журнале Крелле выходит его первая статья «О некоторых задачах, приводящих к уравнениям в частных производных» [3].

С 20 июля 1844 года Гейне работает приват-доцентом (т. е. внештатным преподавателем, как кандидат) в университете Бонна[59].

В 1845 году выходит его работа «К теории тяготения и теплоты» [4], в которой он использует уравнения Ламе. Одновременно с Ж. Лиувиллем (1809–1882), работавшим в Париже, Гейне установил связь между ньютоновским потенциалом и эллиптическими интегралами, определил второе независимое решение дифференциального уравнения Ламе, т. е. ввёл функции Ламе второго рода. В дальнейшем исследования уравнений Ламе продолжали Гейне, Ш. Пикар и Ш. Эрмит.

Под влиянием Дирихле Гейне с 1846 года заинтересовался темой суммирования рядов, причём его первые статьи носят характер переписки с Дирихле [5].

---

[59] Ни экземпляра его диссертации, ни отзывов и документов, связанных с оформлением доцентуры, в архивах университета Бонна не сохранилось.

Влиянием Якоби можно объяснить интерес Гейне к преобразованию рядов в непрерывные дроби [6].

В 1848 году Гейне стал экстраординарным профессором в Бонне.

В 1850 году Гейне женился на Софи Вольф, дочери берлинского купца. В счастливом браке родились четыре дочери и сын. Младшая дочь, Ансельма (Сельма) Гейне (1855–1930), стала писательницей (псевдоним Feodor Helm) и опубликовала воспоминания об отце (1930). В 1905 она написала роман «Мать», посвящённый эмансипации женщин.

В Бонне Гейне пишет работы «Исследование рядов» [7], «Очерки теории эллиптических функций» [8], «Суммирование некоторых особых рядов» [9]. В последней работе Гейне обращается к исследованиям Гаусса 1811 года по сходимости тригонометрических рядов и рядов с дробно-рациональными членами.

В 1851 году выходит его статья «Теория притяжения эллипсоидов» [10], в 1853 году работа о разложении алгебраических функций в ряды Эйзенштейна [11]. В 1854 году Гейне публикует четыре работы: «Исследование интегральной функции» [12], «Дальнейшее исследование интегральной функции» [13], «О разложении корней алгебраического уравнения в степенной ряд» [14], «Потенциал круглого диска» [15]. В 1855 году выходят «Дополнения к отчёту о потенциале круглого диска» [16] и «Прямое доказательство равенства двух определённых интегралов» [17]. Таким образом, к 34-летнему возрасту Гейне уже имел солидную базу по исследованию дифференциальных уравнений в частных производных, теории тепла, суммированию рядов, исследованию непрерывных дробей и эллиптических функций.

6 сентября 1856 года Гейне был назначен ординарным профессором университета Галле, в котором он проработал в течение 20 лет как преподаватель и исследователь.

Рис. 3 и 4. Университет в Галле

Сначала Гейне вёл курсы по теории потенциала с приложениями, по рядам Фурье и тригонометрическим рядам, по механике и теории теплоты. А. Вангерин (Wangerin, 1844–1933), поступивший в университет Галле в 1862 году, писал, что Гейне был очень хорошим преподавателем, его лекции отличала чёткость и результативность. Он всегда указывал студентам, что недостаточно читать учебники и пособия, нужно обращаться к первоисточникам.

Среди опубликованных им работ многие имеют методический характер, это курсы лекций по различным разделам. За все годы работы в университете Гейне прочитал лекции по курсам алгебры и теории чисел, аналитической механики, теории потенциала с приложениями, алгебраического анализа, определённых интегралов, рядов Фурье, тригонометрических рядов, теории теплоты.

Как исследователь, Гейне занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями.

В Галле он пишет «Переход от неопределённого интеграла к определённому» [18], «Приведение эллиптических интегралов к канонической форме» [19], «Письмо в редакцию о непрерывных дробях» [20], «Комментарии к трактату Якоби по вариационному исчислению» [21], «Формула инверсии Лагранжа» [22], «О биномиальном ряде» [23], «Письмо в редакцию о функциях Ламе» [24], «Некоторые свойства функций Ламе» [25], «О числителе и знаменателе приближённых значений непрерывных дробей» [26].

В 1861 году в Берлине выходит его книга «Справочник по сферическим гармоникам» [27]. Расширенные переиздания вышли в 1878 и 1881 годах, количество страниц составило 864 в двух томах, переиздано ещё раз в 1961 году. Здесь он предлагает новый термин – «цилиндрическая функция». Образцовое изложение и систематизация материала на многие годы сделала справочник основным в этой области.

В 1863 году Гейне избирают членом-корреспондентом Берлинской академии наук и членом Геттингенского научного общества.

Его работы 1863–1864 годов – «Функции Ламе различных порядков» [28], «Теоремы Абеля» [29], «О некоторых определённых интегралах» [30], «Специальные функции Ламе первого рода произвольного порядка» [31], «О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка и о существовании и числе функций Ламе первого рода» [32].

Гейне был ректором университета в Галле в течение одного учебного года, с 12.07.1864 по 12.07.1865. Его инаугурационная речь была посвящена законам Ньютона [33]. Тогда же его семья купила собственный дом (Ecke Luisenstraße 1).

Публикуемые им работы имели как исследовательскую, так и методическую направленность и способствовали его преподавательской деятельности. Лекции Гейне были интересны и доступны. Понятия предела, непрерывности и сходимости сопровождались неясностями даже для исследователей, а для студентов и вовсе были окружены туманом. Понятия эти объясняли Вейерштрасс на языке «ε – δ», и Гейне на языке подпоследовательностей (фундаментальных последовательностей). У Гейне был талант облекать новые концепции в понятную и педагогически удачную форму.

Гейне продолжал работать над проблемами анализа. Он занимался тригонометрическими рядами и чувствовал необходимость более тонкого анализа структуры числовой прямой и понятия непрерывности. Начиная с 1870 года, Гейне размышлял о сходимости рядов и об ослаблении степени общности, что привело его к введению понятия равномерной сходимости на компакте. Это отражено и в его последующих работах: «О непрерывных дробях» [34], «Сообщение о непрерывных дробях» [35], «Геометрический смысл сферических гармоник» [36], «Функции Фурье – Бесселя» [37], «О тригонометрических рядах» [38], где ради теоремы о единственности представления функции тригонометрическим рядом исследуется равномерная сходимость рядов Фурье в том виде, как её определил Коши. Историк математики Ф. А. Медведев отмечает: «Одним из интересных аспектов этой статьи Гейне является сознательно выставленный им принцип пренебрежения точечными множествами при рассмотрении различных вопросов анализа. Правда, он пренебрегал только конечными множествами, но сам принцип понимал достаточно широко. Так, вслед за определением равномерной сходимости Гейне ввёл понятие «вообще равномерно сходящегося ряда», т. е. такого ряда, который сходится на [α, β], если из [α, β] выбросить произвольно малые окрестности конечного числа точек [38, с. 356]; говорил он о «вообще непрерывной функции» [38, с. 355]; три основные свои теоремы он сформулировал и доказал при соблюдении того же принципа; поведение ряда в критических точках его не интересовало, и он прямо указывал на это [38, с. 356]» [39, с. 83–84].

В последующих работах «Переписка по вариационному исчислению» [40], «О некоторых условиях при доказательстве принципа Дирихле» [41, 42], Гейне продолжает попытки подвести прочный фундамент под теорию, уделяет большое внимание обоснованию фундаментальных понятий.

Э. Гейне и Г. Кантор

Рис. 5. Георг Кантор

Большой заслугой Гейне было привлечение к работе в Галле Георга Кантора, 24-летнего преподавателя гимназии в Берлине. Именно Гейне внушил ему уверенность в своих силах и заинтересовал вопросами анализа, в частности, вопросами сходимости. Под влиянием Эдварда Гейне, друга и коллеги, как называл его сам Кантор, интересы Кантора сместились в область теории функций действительного переменного. Кантор писал сестре 7 февраля 1869 года: «В Галле меня ожидает настоящее целостное поле деятельности, соответствующее моей работе, возможно, там я получу признание, и мои стремления найдут применение» [43]. В университете Галле Кантор проработал всю свою жизнь.

В 1869 году Кантор получил звание приват-доцента университета Галле и стал преподавателем математического семинара факультета искусств. С 1872 по 1877 год экстраординарным профессором факультета естественной и общественной истории. С 1877 по 1913 год – в должности ординарного профессора.

Совместные беседы Гейне и Кантора, а также начавшееся в 1870-х годах знакомство Кантора с Р. Дедекиндом (1831–1916), привели каждого из них к необходимости освободить понятия числа, предела, и непрерывности от физического и геометрического толкования, необходимости арифметизации континуума, созданию теории действительного числа, и подвели Кантора к созданию теории множеств.

1872 год ознаменовался выходом работ всех троих авторов на эту тему. Каждый из них предложил свою концепцию числа и непрерывности. И если работы Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов [44, с. 9–17] и Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» [52] переведены на русский язык, то работа Гейне «Лекции по теории функций» (Основания обучения функции) [45] до сих пор не известна русскому читателю. В этой работе дано систематическое изложение основ анализа с позиции теории действительного числа, введено понятие равномерной непрерывности; в качестве вспомогательного средства используется метод, получивший впоследствии название леммы Гейне–Бореля. Работа полностью приведена в конце этой главы.

В 1873 году Гейне пишет статью «Потенциал однородных групп» [46], в 1875 – «О постоянном электрическом токе в плоских пластинках» [47]. Это был год, когда Гейне хотел перейти в университет Геттингена, но его отвергли профессора.

В 1876 году выходит его замечание о разностном методе Коши «Письмо в редакцию журнала Лиувилля» [48].

В 1877 году в связи с празднованием столетия Гаусса Гейне был награждён медалью Гаусса.

В 1880 году Гейне публикует «Некоторые приложения расчётов Коши» [49], в 1881 году «О сферической функции $P_n(\cos y)$ при бесконечном n» [50].

Все годы своей работы в университете Гейне был популярен среди студентов, стимулируя своих слушателей к продолжению научной работы. Он был непременным и добросовестным членом высшей экзаменационной комиссии, проявляя к кандидатам симпатию и дружелюбие. Гейне руководил докторскими диссертациями Генриха Цуге (Züge) 1875 году «О притяжении однородного эллипсоида», Карла Баера (Baer)

«Равновесие и движение тепла в однородном параболоиде вращения». Он делал вводные доклады на абилитациях (защита права на чтение лекций) К. Неймана (Neumann) (1858), Г. Роха (1863), К. И. Томе и Г. Шварца (1867), Г. Кантора и Э. Юргенса (1875), Вильтайса (1881).

Гейне умер в Галле после тяжёлой болезни 21 октября 1881 года.

Развитие понятия непрерывности и теории функций в XIX веке

Ощущение нового понимания действительного числа, континуума и непрерывности витало в математической атмосфере XIX века. С 1822 года в работах Фурье возникла проблема сходимости тригонометрического ряда и единственности разложения функции в ряд. В 1829 году Лежён-Дирихле сформулировал условия сходимости тригонометрических рядов. Но прикладные задачи требовали расширения класса функций, разложимых в ряд Фурье, следовательно, анализа числового интервала, развития понятия числа и непрерывности.

С 1858 года Дедекинд размышляет об определении действительного числа как сечения, но ничего не публикует. Вейерштрасс читает лекции в Берлинском университете, используя понятие равномерной сходимости (конвергенции почти всюду), но публикует только специальные статьи, а лекции не издаёт и не разрешает литографировать. Идеи есть, но нет систематического изложения.

По Больцано, 1817 год, функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности, для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, разность $f(x+\omega) - f(x)$ может быть сделана меньше чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим.

По Коши, 1821 год, функция непрерывна, если для каждого значения x разность $f(x+\alpha) - f(x)$ неограниченно уменьшается вместе с уменьшением числового значения α. Иными словами, функция остаётся непрерывной относительно x между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции.

В 1823 году Коши издаёт «Конспект лекций по исчислению бесконечно малых» (Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal, Oeuvres ser. 2, IV, p. 17–20), где даёт следующее определение непрерывной функции: «Для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех x, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x+i) - f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т. е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется. Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку».

По Вейерштрассу, 1861 год: «если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$. Разность $f(x+h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x+h$. Если для h можно определить такую границу δ, что для *всех* значений h, меньших δ по абсолютному значению, разность $f(x+h) - f(x)$ становится меньше сколь угодно малой величины ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Другими словами, некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – непрерывная функция аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом». Вейерштрасс определял непрерывность функции в окрестности точки и на интервале. Он замечал, что нельзя говорить о непрерывности в точке.

Теорему о том, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём, доказал Дирихле в своих лекциях 1862 года, но они были опубликованы лишь в 1904 году. При этом Дирихле неявно использовал тот факт, что если отрезок покрыт бесконечным числом интервалов, то среди них можно выбрать конечное число, также покрывающее данный отрезок. Гейне, ученик Дирихле, несомненно, знал это. Подобная конструкция есть и у Вейерштрасса при построении цепочки открытых дисков.

Начиная с Шарля Мере, 1869 год, иррациональные числа понимались как пределы последовательностей рациональных чисел, причём Мере вводил их как некое фиктивное понятие[60]. В 1872 году выходит

---

[60] Заметим, что в эти же годы Кронекер отвергал в анализе любые попытки создания новых объектов с помощью предельных построений.

книга Шарля Мере, содержащая результаты его исследований предыдущих лет «Новый точный анализ бесконечно малых» [51]. Он пишет: «1. Мы будем называть вариантами различные числа (натуральные или дробные, положительные или отрицательные) $\nu_{m,n,\dots}$, значение которых зависит от натуральных чисел $m,n,\dots$, принимающие все положительные комбинации значений, которые мы будем называть её показателем. 2. Если существует число V, такое, что можно выбрать $m,n,\dots$ достаточно большим, чтобы разность $V - \nu_{m,n,\dots}$ была бы по абсолютной величине меньше произвольного числа для некоторых значений индексов и для всех бо́льших величин, тогда мы скажем, что вариант $\nu_{m,n,\dots}$ стремится или сходится к пределу V. Если $V = 0$, вариант $\nu_{m,n,\dots}$ называется бесконечно малой величиной, как например, разница между вариантом и его пределом» [51, с. 1–2]. Современники не оценили новые идеи Мере, но сто лет спустя французы стали называть новую концепцию числа концепцией Мере – Гейне или концепцией Мере – Кантора.

Остановимся подробнее на статье Гейне «Лекции по теории функций» [44], в которой содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора – Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне – Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году). Статья представляет изложение основ теории функций в традициях Вейерштрасса, но с введением нового понятия действительного числа, иррационального числа и непрерывности. Это конспект лекций, которые Гейне читал своим студентам.

По Гейне, 1872 год, функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), непрерывна в точке x_0 этого интервала, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (a,b), формула $\lim x_n = x_0$ при n, устремлённом к бесконечности, влечёт за собой формулу $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Иррациональные числа Гейне тоже определяет через последовательности: «Я называю числовой последовательностью числа a_1, a_2,..., a_n, если для любого данного числа η, отличного от нуля и достаточно малого, существует значение n такое, что $a_n - a_{n+\nu}$ для любого положительного натурального ν будет меньше, чем η. Слово «число» без дополнительных оговорок уже употребляется для рациональных чисел. Ноль будет рассматриваться как рациональное число. Любую числовую последовательность, в которой a_n с возрастанием индекса n будут меньше, чем данная величина, я буду называть элементарным рядом» [45].

Кантор в 1870 году доказал, что для функции, непрерывной на интервале, единственно её представление тригонометрическим рядом. Этот результат Кантор распространил на функции, имеющие конечное число точек разрыва. Но распределение этих точек на отрезке (континууме) должно быть исследовано более детально. С 1872 года Кантор рассматривает соотношение точек на континууме. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным.

Статья Гейне «Лекции по теории функций» [45] вышла с результатами, очень близкими к результатам Кантора в статье того же года. Как пишет Ф. А. Медведев [44, с. 412–413], «Гейне во введении к ней писал, что та часть его работы, в которой излагается теория действительных чисел, завершена уже давно и что её содержание подсказано соображениями других математиков, особенно Вейерштрасса, ставшими известными Гейне главным образом из устных сообщений. И лишь после этого он продолжил: «Особой благодарностью я обязан г-ну Кантору из Галле за его устные сообщения, которые оказали значительное влияние на форму моей работы тем, что я заимствовал у него соображения о способе введения произвольных чисел при помощи тех особенно удобных последовательностей, которые здесь названы числовыми последовательностями» [45, с. 173]. С другой стороны, уже после смерти Гейне, в 1886 году, Кантор в письме к Виванти писал: «В теории иррациональных числовых величин я воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне следовал в этом за мной (Crelles J., BD 74, s 172). Его изложение отличается от моего лишь в способе выражения, по существу же оно совпадает с моим» [44, с. 297]. Эта статья содержит теорему, называемую ныне теоремой Гейне–Кантора. Обе работы – и Гейне и Кантора – вышли в 1872 году.

Концепция числа Г. Кантора

Работа Кантора называлась «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» («Über die Ausdehnung einer Satzes aus Theorie der trigonometrischen Reinen» [44, с. 9–17, пер. Ф. А. Медведева], и была его первой работой по тригонометрическим рядам. В ней был анализ понятия числовой величины как предела фундаментальных последовательностей, введено понятие предельной точки (точки сгущения). В связи с проблемой сходимости рядов Кантор анализирует бесконечное множество точек и вводит арифметическое понятие иррационального числа с помощью последовательности рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Эта последовательность подчинена тому условию, что для любого положительного ε все её элементы, за исключением не более чем конечного количества чисел, отличаются друг от друга не более чем на ε, т. е. существует натуральное n_1 такое, что при всех $n>n_1$ и для любого m будет выполняться неравенство $|a_{n+m} - a_n|<\varepsilon$. Кантор называет его фундаментальным условием, это условие Коши). Кантор начинает с усиления утверждения, что если последовательность удовлетворяет этому условию, тогда «имеется определённый предел a», или число a ассоциировано с последовательностью, т. е. иррациональные числа идентифицированы фундаментальными последовательностями. Две такие последовательности a_n и b_n определяют одно и то же иррациональное число, если $|a_n - b_n|\to 0$.

Если для любого данного иррационального числа и для достаточно большого n члены последовательности будут по абсолютной величине меньше любого данного числа, тогда $a=0$. Если все они больше, чем некоторое определённое положительное рациональное число, тогда $a>0$. Если все они меньше, чем некоторое определённое отрицательное число, тогда $a<0$. Основные операции распространяются на новую систему, подчиняясь тому, что если $a = a_n$ и $b = b_n$ – две фундаментальные последовательности, тогда $a_n + b_n$ и $a_n \cdot b_n$ определяют $a+b$ и ab.

Если b_n – фундаментальная последовательность иррациональных чисел, тогда существует только одно иррациональное число a, определяемое последовательностью рациональных a_n, таких, что $b_n \to a$. Фундаментальная последовательность позволяет избежать введения новых типов чисел, т. е. иррациональные числа образуют полную систему. «Рациональные числа образуют основу для определения более общего понятия числовой величины. Когда я говорю о числовой величине в обобщённом смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (1), заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, каково бы ни было целое положительное m, или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ при $n \geq n_1$ и m – любое положительное целое число.

Это свойство последовательности (1) я выражаю словами: «последовательность (1) имеет определённый предел b»… Различным таким последовательностям должны соответствовать и разные пределы b, b', b'',...

Если задана другая последовательность a'_1, a'_2,..., a'_n,... (1′), имеющая определённый предел b', то оказывается, что обе последовательности, (1) и (1′) всегда находятся в одном из следующих соотношений, исключающих друг друга: 1) $a_n - a'_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, 2) $a_n - a'_n$ начиная с определённого n всегда остаётся больше некоторой положительной (рациональной) величины ε, 3) $a_n - a'_n$ начиная с определённого n всегда остаётся меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины –ε.

Если имеет место первое отношение, то я полагаю $b = b'$, если второе, то $b > b'$, если третье, то $b < b'$» [44, с. 9–10].

Концепция Р. Дедекинда

Рис. 6. Рихард Дедекинд

Об одновременности появления трёх работ – Гейне, Кантора и Дедекинда, содержащих новое понятие числа и непрерывности, написал

Дедекинд в 1872 году. Он размышлял над определением вещественного числа и понятия числовой непрерывности с 1958 года, но не считал нужным публиковать свои рассуждения: «Я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал также об этом предмете доклад в учёном обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представлялось мне не лёгким, и потому ещё, что сам предмет мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта, в то время, как я наполовину уже стал подумывать о том, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[61], ко мне в руки попала, благодаря любезности её автора, статья E. Heine (Crelle`s Journal Bd.74), которая и подкрепила меня в моём решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что моё изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 г.), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G. Cantor`a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. 5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома в § 2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в § 3, как сущность непрерывности. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел ещё более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, ещё признать не в состоянии» [52, с. 10–11]

В этой же работе Дедекинд формулирует сущность непрерывности: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [52, с 17–18].

---

[61] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца – *примеч. пер. (С. О. Шатуновского).*

В том же 1872 году вышли лекции Вейерштрасса по теории действительного числа, изложенные его учеником Е. Коссаком, определяющие иррациональные числа с помощью понятия агрегатов (конечных числовых множеств) и десятичных приближений [53].

Лемма Гейне – Бореля в современной форме была доказана Борелем в 1895 году для счётного числа покрытий, и Лебегом для произвольных бесконечных покрытий.

Понятие действительного числа ещё формировалось. Предпосылками к его появлению служили предел фундаментальных последовательностей Коши, введённый как свойство, определение фиктивного предела последовательности рациональных чисел Шарля Мере, работы Вейерштрасса, где число – это класс эквивалентности агрегатов, и определение числа Гейне через фундаментальные последовательности; логически безупречно определил число Рихард Дедекинд через сечения. Правда, это определение носило скорее юридический характер, оно не позволяло оценить объём понятия действительного числа. Далее всех пошёл Кантор в работах последующих лет по теории множеств. Он оценивает объём алгебраических иррациональных чисел[62] как счётное множество, оценивает объём всех иррациональных чисел как несчётное множество, и приходит к понятию сравнения объёма множеств через мощность, что позволило ему создать целостную теорию множеств. И во многом он был обязан поддержке своего друга и коллеги Эдварда Гейне.

Теория действительного числа и понятие непрерывности числового континуума получили дальнейшее развитие в работах французской школы теории функций (Бэр, Борель, Лебег и другие), московской школы теории функций (Егоров, Лузин и его ученики), польской школы теории множеств и теории меры (Серпинский и его ученики), и других математиков XX века.

Работы, в которых было впервые введено понятие числовой непрерывности – это работы 1872 года Кантора, Дедекинда, изложение Коссаком теории Вейерштрасса – опубликованы на русском языке. Только работа Гейне «Лекции по теории функций» осталась неизвестной русскому читателю. Предлагаем Вашему вниманию её перевод с немецкого.

---

[62] Одновременно с Дедекиндом, который, правда, не придавал значения этому факту.

Приложение к главе IX

Э. Гейне. Лекции по теории функций[63].

Heine, E. Die Elemente der Functionenlehre

Journal für die reine und angewandte Mathematik (page(s) 172 –188) Berlin; 1872, Bd. LXXIV Heft 2.

Журнал чистой и прикладной математики, 74, с. 172–188, Берлин, 1872.

Развитие теории функций происходит в основном за счёт элементарных фундаментальных теорем, хотя некоторые результаты проницательные исследователи ставят под сомнение, ибо результаты исследований не всегда обоснованы. Я объясняю это тем, что хотя принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию. Его утверждения основываются на неполном определении иррациональных чисел, в котором геометрическая интерпретация, а именно понимание линии как движения, часто приводит к заблуждению. Теоремы должны быть обоснованы с помощью нового понимания действительных иррациональных чисел, которые законно обоснованы и существуют, как бы мало они не отличались от рациональных чисел, и функция однозначно определена для каждого значения переменного, независимо от того, рационально оно или иррационально. С другой стороны, возможно, это напрасные возражения.

Не без колебаний публикую я эту работу, наиболее существенная первая часть которой «О числах» уже давно как закончена. Наряду с трудностью изложения такой темы, я не решался публиковать результаты, получившиеся в результате устного обмена мнениями, и содержащие прежние идеи других людей, прежде всего господина Вейерштрасса, мне остаётся всего лишь реализовать эти результаты; это нужно, дабы не оставлять неясных моментов в изложении. Отдельную благодарность я приношу г-ну Кантору из Галле за беседы, которые оказали значительное влияние на содержание моей работы, так как я позаимствовал у него идею общих чисел, посредством которых образуется ряд

---

[63] Перевод Г. Синкевич.

(А, § 1, определение 1). Мне кажется, в частности, это может быть применено в теории функций (В, § 2, лекция 1), благодаря первоначальному виду, по которому все числовые величины определённо содержатся в бесконечном количестве названного становления. Основание, на котором мы закономерно вводим наши числовые величины, найдены здесь г-ном Кантором, позволяет также ввести отношение «больше», «меньше» и «равно».

Я отвечаю на вопрос, что такое число, не останавливаясь на положительных рациональных числах, я буду понимать число концептуально, возможно, даже иррациональные числа в обычных пределах (в обычном их понимании), в обязательном предположении, что они существуют.

Я придерживаюсь формальной точки зрения[64] *и в то же время я воспринимаю числа как знаки,* чьё существование несомненно. *Особое внимание уделено основным арифметическим операциям*, которые должны быть определены так, чтобы иметь возможность оперировать с символами.

Арифметические операции, называемые правилами, над двумя двумя числами, связанными операционным знаком, следует изменить. Эти правила нужно установить так, чтобы результат обыкновенного вычисления над числами 0, 1, 2, 3 и т. д. был бы обычным. Невозможность вычитания во многих случаях привела к необходимости ввести новые знаки или символы: для каждого уже существовавшего символа «*а*» мы вводим символ «*не–а*» (*neg–a*)*,* и расширяем определение операции. Это позволяет оперировать с новыми объектами, как с прежними. Представляется целесообразным ввести вычитание так, чтобы $neg(a) = 0 - a$. Невозможность осуществить деление двух символов *a* и *b*, если частное не является целым числом, даёт повод сначала связать пару *(a*, *b*), причём соединить так, чтобы вследствие этого получилось, что (*a,* 1) равно *a.* Расширение понятия умножения должно обеспечивать совпадение результата (*a, b*), подобно тому, как частное (*a*, 1) не отличается от *a*, и частное (*b,* 1) *не отличается от b.* Тогда для введённых чисел возможны операции сложения, вычитания, умножения и деления, однако последняя операция невозможна при знаменателе, равном нулю, и числителе, не равном нулю. Невозможность извлечения корня, а также выполнения трансцендентных операций привели к необходимости введения новых

---

[64] На протяжении многих лет в моих лекциях по алгебраическому анализу я направляю свои усилия на введения такого рода. *– Примечание Гейне*.

символов для действительных иррациональных и мнимых чисел. Первоначально правила для операций вводятся в разделе А. Для ограниченных вещественных чисел операции такие же, как и для комплексных, хотя вещественные числа, пока они не имеют сложного составного вида, обозначаются a, b и т. д. Вместо комплексных $a+b\sqrt{-1}$ равноценным будет замена на пару $(a,\ b_i)$, для которой также разъясняется справедливость операции сложения, равно как и для $a + b_i$, а также умножения на $a + b\cdot 1_i$, и наконец, как следует из этого же утверждения, 1_i, корень из « – 1» будет равен $a+b\sqrt{-1}$.

А. Обобщение чисел

§ 1. Числовая последовательность

Определение 1. Назовём числовой последовательностью, последовательность[65], составленную из чисел $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots,$ если для каждого сколь угодно малого ненулевого числа η найдётся значение n, такое что $a_n - a_{n+v} < \eta$ для всех целых положительных v.

Примечание 1. Слово «число» без дополнительных свойств, в разделе *А* означает рациональное число. При этом «ноль» считается рациональным числом.

Определение 2. Каждая числовая последовательность, члены которой a_n уменьшаются с увеличением индекса n, называется элементарной последовательностью[66].

Следствие. Элементы a элементарной числовой последовательности ограничены. Если последовательность не является элементарной, тогда все без исключения элементы имеют величину, отличную от нуля и зависящую от номера n.

Обозначение. Представляется целесообразным использовать греческие буквы только для обозначения членов элементарной последовательности. Таковыми будут η_1, η_2, и т. д. из элементарной последовательности.

Теорема 1. Пусть a_1, a_2, и т. д., а также b_1, b_2, и т. д. – члены числовой последовательности, тогда $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, и т. д., а также $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, и т. д., и a_1b_1, a_2b_2, и т. д. – это тоже числовые последовательности.

Доказательство. Справедливо равенство $(a_n \pm b_n) - (a_{n+\nu} \pm b_{n+\nu}) =$ $= (a_n - a_{n+\nu}) \pm (b_n - b_{n+\nu})$, по верхнему знаку и точно также по нижнему

---

[65] Гейне рассматривает равномерно сходящиеся последовательности в смысле Коши.

[66] Гейне называет убывающие последовательности элементарными.

знаку. Это выражение будет сколь угодно малым при увеличении *n*, где *a* и *b* таким образом образуют числовую последовательность, (§ 1, определение 1), что $a_n - a_{n+\nu}$ и $b_n - b_{n+\nu}$ при возрастающем *n* сколь угодно малы.

Это же верно и для $a_n b_n - a_{n+\nu} b_{n+\nu} = a_n(b_n - b_{n+\nu}) + b_{n+\nu}(a_n - a_{n+\nu})$, где a_n и $b_{n+\nu}$ не превосходят конечной величины (§ 1, следствие).

Теорема 2. В условиях первой теоремы и, кроме того, когда *a* не является элементарной последовательностью, то

$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$ является числовой последовательностью.

Доказательство.

$$\frac{b_m}{a_n} - \frac{b_{n+\nu}}{a_{n+\nu}} = \frac{b_n a_{n+\nu} - a_n b_{n+\nu}}{a_n a_{n+\nu}} = \frac{b_n(a_{n+\nu} - a_n) + a_n(b_n - b_{n+\nu})}{a_n a_{n+\nu}}$$

Разность в числителе становится сколь угодно малой при возрастании *n,* а знаменатель не равен нулю (§ 1, следствие). Таким образом, и левая сторона с ростом *n* будет сколь угодно малой.

Определение 3. Будем называть числовые последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ равными тогда и только тогда, когда числовая последовательность $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots$ будет элементарной последовательностью.

Теорема 3. Все элементарные последовательности равны друг другу и, обратно, не существует никаких других элементарных последовательностей, отличающихся от данных.

Доказательство. Пусть ε_n и η_n являются членами элементарных последовательностей. Тогда убывающая разность $\varepsilon_n - \eta_n$ при возрастающем *n* будет сколь угодной степени малости. Следовательно, $\varepsilon_1 - \eta_1, \varepsilon_2 - \eta_2, \ldots$ есть элементарная последовательность, т. е. (§ 1, определение 3) и в самом деле последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ соответственно равна $\eta_1, \eta_2, \ldots$

Не существует элементарной последовательности с *n*-м элементом a_n, для которого разность $a_n - \varepsilon_n$ с увеличением *n* будет оставаться большой[67] (§ 1, следствие).

§ 2. Введение более общего понятия числа либо цифры

Требование. Дополним каждую числовую последовательность символом.

---

[67] Благодаря этому представлению будет обеспечиваться единственность предельного иррационального числа, называемого символом, к которому могут стремиться члены последовательностей, состоящих из рациональных чисел.

Это будут такие последовательности, которые в квадратных скобках содержат t, ß таким образом, что, например, последовательность a, b, c,... содержит символы [a, b, c, …и т. д.][68].

Определение 1. Общим числом или числом называется символический ряд чисел, состоящий из символов a, b, c, ...

Определение 2. Числа называются равными или взаимно-заменяемыми, если они равны; и неравными или невзаимозаменяемыми, если они имеют несовпадающие последовательности чисел (§ 1, определение 3).

Обозначение. Если $[a, b,\ldots]$ и $[a', b',\ldots]$ равны друг другу, мы будем обозначать это $[a, b,\ldots] = [a', b',\ldots]$ или $[a', b',\ldots] = [a, b,\ldots]$.

Сокращение. В число символов, обозначающих элементы ряда с помощью маленьких букв, помимо основных могут быть включены большие буквы, так что $[a_1, a_2, \ldots]$ будем обозначать A; $[\eta_1, \eta_2, \ldots]$ будем обозначать H.

Утверждение. Числовые последовательности, составленные из символов и содержащие только одинаковые элементы, являются рациональными числами.

Следствие 1. Как сказано (§ 2, обозначение), $[a_1, a_2, \ldots] = A$, $[a, a, a,\ldots] = a$.

Теорема 1. Каждая элементарная последовательность имеет своим символом (пределом) ноль.

Доказательство. Все элементарные последовательности равны между собой (§ 1, теорема 3). Таким образом, каждая элементарная последовательность имеет такой же символ (§ 2, определение 2), как и состоящая из знаков $[0, 0, 0, \ldots]$, так что (§ 2, требование 1) они равны нулю.

Пояснение. Принимаем в расчёт не числовую последовательность, а цифровую. Далее будут показаны арифметические действия (§ 3) над числовыми последовательностями, определённые таким образом, чтобы не противоречить действиям над достижимыми рациональными числами, у которых одинаковы все элементы a_1, a_2,…; следовательно, числовая последовательность образует рациональное число, что и доказывает утверждение.

Определение 3. Если $A > B$, тогда разность $a_n - b_n$ положительна для любого номера n, и если $A < B$, тогда разность $a_n - b_n$ отрицательна для любого номера n.

---

[68] Таким образом, Гейне расширяет поле действительных чисел за счёт тех чисел, которые невозможно выразить конечной числовой записью, а также возможность многократного применения операции взятия предела.

Пояснение. Отношение равенства исключает отношение «больше» или «меньше». Действительно, если $A = B$, то принадлежащие им элементы $a_n - b_n$ образуют элементарную последовательность; но ни для каких $A = B$ не найдётся таких $a_n - b_n$, чтобы они образовали элементарную последовательность, являющуюся к тому же абсолютно определённой (§ 1, следствие 1) и отличающуюся от нуля, так что либо $A>B$, либо $A<B$.

Следствие 2. Если $A>B$, тогда $B<A$.

Теорема 2. Символы двух последовательностей $b_1, b_2, b_3, \ldots$ и $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, b_\mu, b_{\mu+1}, b_{\mu+2}, \ldots.$ равны.

Доказательство. Две последовательности равны, так как элементы разности $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_\rho - b_\rho, b_\mu - b_{\rho+1}, b_{\mu+1} - b_{\rho+1}, \ldots$ образуют элементарную последовательность (§ 2, определение 2; § 1, определение 3).

Следствие 3.[69] Число не изменится, если из образующей его последовательности отбросить любое конечное количество элементов.

§ 3. Операции над более общими числами

Определение 1. $A \pm B$ является тем же числом, что и соответствующая числовая последовательность (§ 1, теорема 1) $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots$, равно как одно и то же число представляют AB и соответствующая числовая последовательность $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$ Если не выполняется $A = 0$, (§ 1, теорема 2; § 2, теорема 1), тогда B/A соответствует $b_1/a_1, b_2/a_2, b_3/a_3, \ldots$

Следствие 1. Если $A \pm B = C$, или $AB = C$, или при A не равном нулю $C/A=B$, тогда соответственно выполняется

$a_n + b_n + \eta_n = c_n$,

$a_nb_n + \eta_n = c_n$,

$c_n/a_n + \eta_n = b._n$

И обратно, из трёх последних уравнений следуют первые.

Следствие 2. Справедливо $A \pm 0 = A$.

Следствие 3. Изменению знака $-a_1, -a_2, \ldots$ соответствует $0 - A$.

Примечание. Принято писать $-A$ вместо $0 - A$, подразумевая присутствие всего выражения.

Определение 2. Численным или абсолютным значением элемента является значение, которое получается при замене символа на предельное числовое значение.

---

[69] Отсюда мы видим, что вполне достаточно иметь среди элементов такие, которые не являются его первыми элементами, достаточно принять только общий закон, что для последовательности $a_1, a_2, \ldots$ принадлежащие к ней элементы могут быть выбраны из $[a_n]$. Это приводит к замене на обычное обозначение в скобках с точками (§ 4, пример): $1/9 = [0{,}1; 0{,}11; 0{,}111, \ldots] = 0{,}111\ldots$ Так принято во всём мире. – *Примечание Гейне*.

Теорема. Если $A \pm B = C$, или $AB = C$, или при A не равном нулю, тогда соответственно $A = C \mp B$ или $B = C/A$.

Доказательство. В первом случае (§ 3, следствие 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n \ldots$, следовательно, $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. Итак, имеем $[a_1 + \eta_1, a_2 + \eta_2, \ldots] = [c_1 \mp b_1, c_2 \mp b_2, \ldots]$. В левой части получается (§ 3, определение 1; § 2, теорема 1) $A + 0$ или A (§ 3, следствие 2), в правой части (§ 3, определение 1) получается $C \mp A$. Доказательство во втором случае аналогично.

§ 4. Отношение общих чисел к рациональным

Определение 1. Если для (рациональных) чисел a_1, a_2,..., некоторое (рациональное) число U имеет такое свойство, что $U - a_n$ уменьшается с ростом n, то тогда U называется пределом a.

Теорема 1. Если элементы данной числовой последовательности a_1, a_2,..., имеют (рациональным) пределом U, тогда U тоже принадлежит последовательности чисел a_1, a_2,...

Доказательство. Очевидно, что члены последовательности $U - a_1$, $U - a_2$, $U - a_3$,... образуют элементарную последовательность, пределом (§ 4, определение 1) которой является ноль (§ 2, теорема 1). В то же время (§ 3, определение 1) также будет и с другой стороны = $[U, U, U, \ldots] - [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, что тоже (§ 2, утверждение) будет равно $U - A$.

Отсюда следует, что $U = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Пример. Дроби 0,1; 0,11; 0,111; …приближаются к рациональному числу 1/9, так что (см. примечание к § 2, следствие 3), 1/9 = [0,1; 0,11; 0,111; …].

Определение 2. Для чисел C_1, C_2, C_3,...,C_n,..., говорят, что они уменьшаются с ростом n при любых первоначальных значениях и приближаются к нулю, если существует число D, такое, что для всех положительных целых n существует численное значение $C_{n+\nu}$ (§ 3, определение 2), меньшее чем D (§ 2, определение 3).

Следствие. Если это верно для каждого D, тогда это верно и для каждого рационального числа d, так как рациональное число является частным случаем (§ 2, утверждение). Но также верно и обратное: если это верно для любого рационального числа, тогда это выполняется для любого числа D. Если это верно для данного D, численное значение которого равно $[d_1, d_2, \ldots]$ и не равно нулю, то также верно, что для положительного рационального d может быть задано и d_n, близкое к нулю, которое будет меньше, чем число d_m для назначенного m. Теперь пусть значение $C_{n+\nu}$ будет меньше d, так что, если оно представляется через $[c_1, c_2, \ldots]$, то $d - c_m$ с увеличением m всегда остаётся положительным, и тогда для $d_m > d$ также положительным будет и $d_m - c_m$. *Этого достаточно, чтобы выполнялся критерий для рациональных чисел* D[70].

Определение 3. Если A есть данное число и с ростом n разность $A - B_n$ становится меньше любого заданного числа, тогда A есть предел B.

Теорема 2. Число A является пределом последовательности членов a, к которой оно принадлежит.

Доказательство. Нужно показать (§ 4, определение 3), что $A - a_n$ меньше любого назначенного числа (§ 4, следствие), или меньше любого рационального числа d. Пусть $A - a_n$ равно $[a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots, a_n - a_n, a_{n+1} - a_n, \ldots]$ или (§ 2, теорема 2) равно $[a_{n+1} - a_n, a_{n+2} - a_n, \ldots]$. Выберем достаточно большое n, чтобы все члены последовательности оставались меньше d, таким образом, число не превосходит $[d, d, \ldots]$, и, следовательно, меньше d.

§ 5. Иррациональные числа произвольного порядка

Обозначение. Числа вообще, когда они в частных случаях становятся рациональными числами, будем называть иррациональными числами первого порядка. Как из рациональных чисел первого порядка A формируются иррациональные числа, так вновь из пределов иррациональных чисел можно получить числа второго порядка A', из них можно извлечь иррациональные числа третьего порядка A'', и т. д. Иррациональные числа m+1-го порядка будем обозначать $A^{(m)}$.

Иррациональное число, лишённое порядка, становится рациональным. То, что иррациональные числа существуют, то есть не все величины $A^{(m)}$ могут быть рациональными числами, будет показано в разделе В (§ 3, следствие 2).

---

[70] Здесь, так же, как и в теореме 2 § 2, сформулирован принцип распространения локального свойства на всё множество, т. е. можно выбрать конечное число интервалов, покрывающих данный отрезок. Гейне оперирует с рациональными и иррациональными числами, и конечным числом интервалов-покрытий. В 1895 году Э. Борель распространил этот принцип на счётное число интервалов. В 1898 году А. Лебег усилил его для любого числа интервалов. Гейне использует этот принцип в доказательстве теоремы 6 § 3 о равномерной непрерывности функции на интервале. Этот принцип в литературе имеет различные названия: лемма (или теорема) Гейне–Бореля, лемма Бореля–Лебега. Гейне пользуется им при доказательстве пяти последних теорем.

Теорема. Иррациональности m+2-го порядка не возникают заново, они согласуются с первым порядком.

Доказательство[71]. Пусть дано $A^{(m+1)}=\left[A_1^{(m)},A_2^{(m)},A_3^{(m)},\ldots\right]$. Дальше возможно представить, что рациональные числа a_1, a_2, a_3,… соответственно расположены до чисел $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, $A_3^{(m)}$,... и они будут соответственно отличаться меньше чем на 1, 1/2, 1/3,... Пусть a_1, a_2, a_3, … определяют иррациональное число A первого порядка, так что $A^{(m+1)} - A$ будет элементарной последовательностью или нулём, т. е. это означает, что $A^{(m+1)} = A$.

В. О функциях

§ 1. Функции в целом

Определение. Однозначной функцией одной переменной x называется выражение, чётко определённое для любого рационального и иррационального x.

Пояснение. Значение функции для любого иррационального значения переменной не позволяет определять её так же, это зависит от специальной числовой последовательности, с помощью которой даётся иррациональная величина, *скорее всего, нужно придерживаться того же, что совпадает с определённой числовой последовательностью иррациональных величин, из которых выбирается x.*

Теорема 1. Любая целая степень x есть однозначная функция.

Доказательство. Предположим для определённости, что x принимает только одно значение, рациональное или иррациональное, из X – допустимого $[x_1, x_2, \ldots]$, и в то же время X равно величинам $[y_1, y_2, \ldots]$; таким образом (А, § 2, определение 2) последовательность $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$,… будет элементарной последовательностью, обозначенной η_1, η_2,… Для m-кратного умножения элементов из X на самих себя (А, § 3, определение 1) получается соответственно $\left[x_1^m, x_2^m, \ldots\right]$, $\left[y_1^m, y_2^m, \ldots\right]$[72], их величины согласованы, и их разность $[(x_1+\eta_1)^m - x_1^m, (x_2+\eta_2)^m - x_2^m, \ldots]$ образует элементарную последовательность.

---

[71] Предполагается, что иррациональность высшего порядка трактуется так же, как прежде трактовалась иррациональность первого порядка. Я полагаю, что отношения будут очень похожи и их разработка без дополнительных усилий будет во многом повторением прежнего. – *Примеч. Гейне.*

[72] В § 5 мы наметили возможность обобщённого понимания величин x и y не только как рациональных чисел; это можно распространить на все или частично на все иррациональные числа. В данном случае мы имеем дело с однозначной функцией, поэтому излишне каждый раз добавлять эти замечания. – *Примеч. Гейне.*

Следствие. Все так называемые целые функции x являются [однозначными] функциями x.

Теорема 2. Sin x и cos x – это функции x.

Докажем это утверждение. В силу того, что, как известно, sin$x$ раскладывается в степенную последовательность по степеням, поэтому необходимо, чтобы sin x был числом, которое соответствует числовой последовательности $x,\ x-\frac{x^3}{6},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ldots$ Каждый элемент, независимо от того, как далеко он расположен и как он сформирован, является целой функцией от x и имеет определённое значение. То, что члены числовой последовательности являются вполне определёнными, обусловлено разложением в ряд, а именно sin x.

Примечание. Нет иного способа вычислить sin x для иррациональной величины x, кроме как приближённо сходящегося вычисления, поэтому вычисляем посредством приближения sin x_1, sin x_2,… и т. д., где x_1, x_2, … и т. д. члены числовой последовательности, представляющей иррациональную величину.

До сих пор это делалось без проверки, потому что синус – это величина, у которой значения sin x_1, sin x_2,… тесно примыкают друг к другу (сравни с B, § 2, пояснение). Подобно тому, как каждое иррациональное число имеет вполне определённое значение, то же верно и для синуса любого числа, только это до сих пор не доказано. Также имеет смысл и *сумма ряда Фурье* разложения конечной функции, в том числе и в точках *разрыва*. Возражение, что невозможно произвести вычисления в тех точках, где абсциссы разъединены значением π и представляют собой иррациональные числа, имеет силу только до тех пор, пока мы не урегулируем право иррациональностей на самостоятельное существование[73].

(Для численного расчёта суммы при сколь угодно больших значениях до и после разрыва можно использовать способ уменьшения количества n средних значений. Приближение к среднему значению может достигаться путём увеличения числа n, когда для критических иррациональных абсцисс установлены рациональные значения, достаточно близкие к истинным.)

---

[73] Отсюда берёт начало принцип пренебрежения некоторым множеством точек, или принцип установления степени общности, впервые сформулированный Гейне и широко используемый в теории множеств и теории меры XX века.

§ 2. Условия непрерывности

Определение 1[74]. Функция *f(x) при любом определённом значении* $x = X$ *называется непрерывной*, если для любого сколь угодно малого заданного числа ε и любого положительного числа η_0 выполняется условие, что для любой положительной величины η, меньшей, чем η_0, численное значение $f(X \pm \eta) - f(X)$ не превосходит ε.

Следствие 1. Два числовых значения функции аргумента x, которые лежат между $X - \eta$ и $X + \eta$, могут отличаться не более чем на 2ε.

Пояснение. Функция представляет собой агрегат[75] отдельных величин (A, § 1, определение), расположенных друг относительно друга так же, как и значения в окрестности, образованной непрерывным образом.

Теорема 1[76]. Если функция $f(x)$ в точке $x = X$ непрерывна, то для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$, которая обозначена символом X, можно образовать числовую последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots$ обозначаемую как последовательность $f(X)$; и обратно, если для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$, которая обозначена символом X, формируется последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots$ обозначенная символом $f(X)$, тогда $f(x)$ при $x = X$ непрерывна[77].

Доказательство.

Первое. Каждая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ может быть представлена заменой на элементарную последовательность $X + \eta_1, X + \eta_2, \ldots$ Так как это непрерывные функции, то для любого заданного числа ε (B, § 2, определение 1) члены последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$ убывают до η_0, так

---

[74] В такой форме определение непрерывной функции сформулировал Н. Абель в 1826 году, не оговорив знак приращения аргумента.

[75] Aggregat, совокупность – термин, применяемый Вейерштрассом с 1861 года. Впервые встречается у Ньютона.

[76] Предложение о том, что функция тогда и только тогда непрерывна, когда $f(X)–f(x_n)$ сколь угодно мало для любого числа из последовательности X, с доказательством, я позаимствовал у г-на Кантора. В то время как я здесь рассматриваю функции одной переменной, г-н Кантор рассматривал общие функции нескольких переменных, и он показал непрерывность этих функций, которые в другом месте (в этом же журнале, т. 71, стр. 361) я назвал равномерными, если они удовлетворяют определенным условиям в каждой точке. Общий ход доказательства некоторых предложений изложен в § 3 в соответствии с принципами господина Вейерштрасса, известных мне из устных бесед с господами Вейерштрассом, Шварцем и Кантором, так что в результате осуществления этих свидетельств мне принадлежат лишь детали. – *Примеч. Гейне*.

[77] Эту теорему называют определением непрерывности по Гейне. Современная её формулировка такова: две непрерывных функции, совпадающие на плотном множестве, идентичны. Для Гейне плотным множеством является множество рациональных чисел.

что, несомненно, для величины n разность $f(X+\eta_n)-f(X)$, т.е. $f(x_n)-f(X)$ не будет превосходить ε. Так как ε можно взять сколь угодно малым, эта разность является общим членом элементарной последовательности $f(x_1)-f(X), f(x_2)-f(X),...$, числовые значения которой стремятся к нулю. С другой стороны, это также (A, § 3, определение 1) равно $[f(x_1), f(x_2), ...]-f(X)$, что и доказывает первое предложение, то есть равенство $f(X)=[f(x_1), f(x_2), \ldots]$.

Второе. Теперь пусть для функции выполняется вышеупомянутое условие, а именно, что для каждой без исключения последовательности X чисел $x_1, x_2,...$, члены последовательности $f(x_1)-f(X), f(x_2)-f(X),\ldots$ могут быть сколь угодно малы, и отсюда следует её непрерывность. Действительно, если мы фиксируем число ε (B, § 2, определение 1), и возьмём также малое η_0, условие непрерывности не будет выполнено, так как всегда существует число η меньшее η_0, для которого $f(X+\eta)-f(X)$ остаётся больше ε; это должно выполняться для любой величины η_0, для такого значения η (меньшего, чем η_0), чтобы разность была не меньше чем ε, и была бы равной η'. Для любого числа η, вдвое меньшего чем η_0, разность при $\eta=\eta''$ не может быть меньше, чем ε, и для любого η_0 равна половине от неё (т. е. четверти), потом можно взять $\eta=\eta'''$ и т. д. Для числа η_0 формируется элементарная последовательность, состоящая из уменьшающихся членов $\eta', \eta'', \eta''',\ldots$ убывающая, так что $X+\eta', X+\eta'',...$ – числовая последовательность $x_1, x_2,..$ представимая числом X, но однако без выполнения того, чтобы $f(x_1)-f(X), f(x_2)-f(X),\ldots$ было бы меньше чем ε, что противоречит предположению.

Теорема 2. Каждая непрерывная функция $f(x)$ определена для любого данного x, если она определена для каждого из рациональных значений переменных[78].

Доказательство. Пусть X – иррациональное число из заданной последовательности $x_1, x_2, x_3,\ldots$; пусть далее $y_1, y_2, y_3,\ldots$ – рациональные числа, такие, что для $x_1, x_2, x_3,\ldots$ отличаются меньше чем на 1,1/2,1/3,… Так как каждый x для одноимённого y соответственно отличается на элементарную последовательность (A, § 2, определение 2), то тогда X равен $[y_1, y_2,\ldots]$, и также (B, § 2, теорема 1) $f(X)=[f(y_1), f(y_2), \ldots]$.

Теорема 3. Каждая целая степень x при каждом значении $x = X$ непрерывна.

---

[78] Сейчас требование для функции быть определённой на рациональном множестве заменено требованием быть определённой на плотном множестве.

Доказательство. Вновь пусть $X = [x_1, x_2, \ldots]$, из чего следует (А, § 3, определение 1), что $X^m = [x^m{}_1, x^m{}_2, \ldots]$. Однако (В, § 2, теорема 1) это и есть условие непрерывности всякой функции $f(x) = x^m$ из X.

Следствие 2. Каждая целая функция одной переменной непрерывна.

Теорема 4. Синус одной переменной – непрерывная функция.

Доказательство. Можно показать, что $\sin x_1, \sin x_2, \ldots$ образуют числовую последовательность, и во-вторых, что то же самое, это $\sin X$. Отсюда следует, что $\sin X - \sin x_1$, $\sin X - \sin x_2$, … – это элементарная последовательность. В самом деле, $\sin X - \sin x_n$, или $\left[X - x_n, X - x_n - \frac{X^3 - x_n^3}{6}, \ldots\right]$ при возрастающем n произвольно уменьшается.

§ 3. Свойства непрерывных функций

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* от $x = a$ до $x = b$, если она непрерывна для каждого значения аргумента, заключённого между a и b (В, § 2, определение 1) с включением значений a и b; она называется *равномерно непрерывной (gleichmässig continuirlich)* от $x = a$ до $x = b$, если для любого сколь угодно малого ε найдётся такое значение η_0, что для любого положительного числа η, меньшего η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ не превосходит ε. Какую бы величину x мы ни взяли, при условии, что x и $x \pm \eta$ принадлежат области между a и b, будет *обязательно* выполняться *то же самое* требование[79].

Теорема 1. Каждая целая степень x в указанных пределах равномерно непрерывна.

Доказательство. Так как $(x \pm \eta)^m - (x)^m$ в любом случае не превосходит произведения множителя η на фиксированную величину, то эта разность остаётся для любого x сколь угодно малой при любой произвольно малой η_0.

Следствие 1. Каждая целая функция в произвольной области равномерно непрерывна.

Теорема 2[80]. Если (для каждого x) от a до b дана такая непрерывная функция, что между двумя значениями a и b имеются $x = x_1$ и $x = x_2$, где функция имеет противоположные знаки, то она примет нулевое значение для некоторого промежуточного x.

---

[79] Здесь впервые даётся определение равномерной непрерывности.

[80] Теорема Больцано– Коши.

Доказательство[81]. Пусть $x_2–x_1 = \delta$ и $f(x_1)$ положительна. Составим величины $x_3 = x_2 - \frac{\delta}{2}, x_4 = x_3 \pm \frac{\delta}{4}, x_5 = x_4 \pm \frac{\delta}{8}$, ..., и в общем, при вычислении x_{n+1} после x_n получаем положительный или отрицательный знак в зависимости от того, была ли $f(x_n)$ положительна или отрицательна; значение функции $f(x_n)$ для какого-нибудь n будет нулевым, так что не потребуется никакого дополнительного доказательства.

Числа x_1, x_2,… образуют числовую последовательность, так как (A, § 1, определение 1) разность $x_{n+\nu} - x_n$, как следует из приведённых равенств, где выполнялось основное элементарное вычисление, даже в самом неблагоприятном случае, а именно, когда значения функции в точках x_{n-1}, x_n,..., $x_{n+\nu-1}$ имеют одинаковый знак, эта разность $x_{n+\nu} - x_n$ с ростом n будет сколь угодно малой. Число[82] этой числовой последовательности есть X, я утверждаю, что $f(X)$ равно нулю.

Если бы это было не равно нулю, то приняло бы значение, равное 4ε. Теперь подберём такое значение η_0, чтобы $f(x \pm \eta) - f(X) < \varepsilon$ (B, § 2, определение 1), и выберем n настолько большим, чтобы x_n, x_{n+1},… отличались бы меньше, чем на η_0, так что $f(X)$ из $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$,... будут отличаться менее чем на ε. Тогда разность $f(x_n) - f(x_{n+\nu})$ будет меньше, чем 2ε. Придавая теперь ν настолько большое значение, чтобы $f(x_n)$ и $f(x_{n+\nu})$ имели бы противоположные знаки (то, что это всегда может быть достигнуто, будет показано ниже), видим, что $f(x_n)$ даже меньше, чем 2ε, следовательно, $f(X)$ меньше, чем 3ε, а значит, не равно 4ε.

Если, однако, при достаточно большом n возьмём такое число ν, что $f(x_{n+\nu})$ сохраняет тот же знак, что и в (точке) x_n, в последовательности найдётся такое число x_m с меньшим номером, для которого знак функции $f(x)$ сохраняется для x_m, x_{m+1},… и больше не изменяется. Так как $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки, следовательно, m по крайней мере равно 2; и следовательно, $f(x_{m-1})$ и $f(x_m)$ имеют разные знаки. Определим α как положительную или отрицательную единицу, в зависимости от того, положительна или отрицательна $f(x_{m-1})$, в соответствии с этими требованиями, тогда по предположению, будет $x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}$, $x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}$, $x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m}$,.... и таким образом $x_{m+\mu} - x_{m-1} = \alpha\delta 2^{2-m}\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{\mu}}\right)$.

---

[81] Представляется целесообразным исключить при доказательстве геометрические представления ради краткости. – *Примеч. Гейне.*

[82] То есть предел последовательности.

С увеличением μ эта разность уменьшается справа, и характер её с любой степенью малости таков, что числовая последовательность X создаёт сверху над x_{m-1} ограничивающую числовую последовательность. Общий член последовательности x_n становится произвольно близким к x_{m-1} и при этом данная целая величина $f(x_{m-1})$ для числа α является противоположной. Вследствие этого непрерывность функции $f(x)$ невозможна.

Следствие 2. Как только α – целое положительное неквадратное число, уравнение $x^2 - \alpha = 0$ не имеет целого решения, т. е. не имеет рациональных корней. Но, однако, левая сторона уравнения для некоторых различных значений x имеет противоположные знаки, так что уравнение имеет иррациональные корни. Это доказательство того, что не все числа сводятся к рациональным, но есть ещё и иррациональные числа (А, § 5).

Теорема 3. Функция $f(x)$, определённая от $x = a$ до $x = b$ так, что для двух близко расположенных чисел x_1 и x_2, из убывающей последовательности $f(x)$ имеет различные знаки, является разрывной функцией.

Доказательство. Если она непрерывна, то найдётся число ξ из x, равное 2ε. Следовательно, найдётся величина η_0, такая, что $f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon$ для всех η, не превышающих η_0. Между $x = \xi$ и $x = \xi + \eta_0$ функция $f(x)$ соответственно имеет разные знаки, следовательно, для каждого $x = \xi + \eta$ будет исчезающее мала (В, § 3, теорема 2), так что $f(\xi)$ отличается от нуля не более, чем на 2ε.

Теорема 4. Если для всех значений от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, и в границах от $x = a$ до $x = b$ становится меньше любой указанной величины, то она *достигает* значения нуля.

Доказательство. Так как $f(x)$ для любого x также имеет определённое значение, это может быть только для таких x, которые меньше любого указанного числа, когда его величина убывает. Пусть теперь x_1 и x_2 – два различных числа, для которых $f(x)$ сколь угодно мало; мы сохраняем этот термин из доказательства второй теоремы, так что числа x_3, x_4 и т. п. образуются по рекуррентным формулам указанным выше способом, в которых выбор знака ещё не определён, и принимают близкие значения в $x = x_3$, или $x = x_4$, ..., $x = x_n$; в этих точках $f(x)$ может быть сколь угодно малым. В таком случае она в этих точках обращается в ноль, как это было видно с самого начала доказательства, и утверждение будет доказано. Осталось только показать, что если функция в точках x_3, x_4, … обращается в ноль, то сколько может быть таких значений.

Числа x, для которых $f(x)$ становится сколь угодно малой, являются или все большими, чем x_3, или все меньшими, чем x_3; или некоторые из них меньшими, а некоторые большими. В первом случае мы формируем x_4 из x_3 с помощью положительного знака, во втором – с помощью отрицательного, в третьем установим его произвольно, пусть это будет положительный. Подобным же образом сформируем x_5 из x_4, и так далее, так что последовательность $x_1, x_2, \dots$, образована из чисел X, так что $f(x)$ равно нулю.

Если она отличается от нуля на 3ε, тогда, очевидно, в силу второй теоремы для η_0 выберем n настолько большим, чтобы $x_n, x_{n+1}, \dots$, отличалось от X не более чем на η_0. Тогда существуют значения x_n и $x_{n+1}, \dots$, между которыми лежит число x, для которого $f(x)$ будет, $< \varepsilon$, тогда можно сделать, чтобы $f(X)$, допустим, при $X - \eta_0 < x < X + \eta_0$ *отличалась бы* менее чем на ε, в крайнем случае на 2ε, и уж ни в коем случае на 3ε. Но если бы ν было бы настолько велико, что x_n будет оказываться каждый раз больше или каждый раз меньше чисел $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, так что x_m, последний из этих созданных x, которые соответственно или меньше или больше, как это упоминалось выше; $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$ будут тогда соответственно больше или меньше, чем x_m, и образуют возрастающую или убывающую последовательность членов, которая всегда остаётся меньше или больше x_{m-1}. Подобно такому же случаю второй теоремы получим $X = x_{m-1}$. Пока $f(X) = f(x_{m-1})$ сохраняет значение, ограниченное 3ε, следовательно, $f(x)$ должна оставаться сколь угодно малой для x, лежащих сколь угодно близко к x_{m-1}, а именно между $X = x_{m-1}$ и x_n при достаточно большом n. Однако это в силу непрерывности $f(x)$ невозможно.

Следствие 3. Если (для всех отдельных промежуточных значений) от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция не всюду равна постоянной величине, она достигает при некотором определённом значении x максимума и минимума[83].

Теорема 5. Если (для всех отдельных промежуточных значений) от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция $f(x)$ одной переменной, лежащей между a и любым рациональным или иррациональным числом X, так что $a < X < b$, в точках, близких к X принимает неположительные значения, но после X положительна, тогда $f(X) = 0$.

---

[83] Теорема Вейерштрасса.

Доказательство. Пусть x_1, x_2,… – числовая последовательность для X, все без исключения её члены меньше X. Тогда $f(X) = [f(x_1), f(x_2),\ldots]$ не является положительной, но и отрицательной вследствие непрерывности $f(x)$ она не может быть по построению, так как эту последовательность определили как имеющую нулевое и различные отрицательные значения; продолжение $f(x)$ принимает наименьшее значение при x, большем X, по предположению, положительное. Следовательно, остаётся $f(X) = 0$.

Теорема 6[84]. Если для всех отдельных промежуточных значений от $x = a$ до $x = b$ функция $f(x)$ одной переменной непрерывна, то она равномерно непрерывна (В, § 3, определение 1).

Доказательство. Выберем 3ε произвольно большим, так что найдётся такое число, что для $x = a$ будет выполняться условие, что разность $f(x) - f(a)$ по абсолютной величине $\leq 3\varepsilon$. Значение, при котором это достигается, есть наибольшее, и в то же время $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$ (В, § 3, теорема 5). Это значение x_1. Точно так же можно найти x_2 как наибольшее; это означает, что от $x = x_1$ до $x = x_2$ всегда остаётся $f(x) - f(x_1) \leq 3\varepsilon$. Так можно продолжить: придадим какому-то конечному числу n такое значение, чтобы выполнилось равенство $x_n = b$, или найдём, чтобы разность $f(x) - f(x_{n-1})$ от $x = x_{n-1}$ до $x = b$ не превышала 3ε. Итак, утверждение доказано.

По-прежнему остаётся справедливым, что не существует такого n, при котором величины x_1, x_2, … образуют бесконечно возрастающую последовательность, не превосходящую b. Этот ряд представляет собой числовую последовательность с элементами X; заслуживают внимания их свойства, в силу которых для каждого n выполняется равенство $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Подберём теперь такое η_0, чтобы $f(X)$ отличалось от $f(X - \eta)$ меньше, чем на ε, при $\eta < \eta_0$. Между числами $X - \eta_0$ и X можно расположить последовательность x_n, x_{n+1}, …, так что (В, § 2, следствие 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ будет меньше, чем 2ε, в то время как другая часть должна быть 3ε. Следовательно, основное предположение невозможно, и функция равномерно непрерывна.

Галле, октябрь 1872 года.

---

[84] Теорема Гейне–Кантора. При доказательстве этой теоремы впервые используется принцип покрытий.

Литература к IX главе

1. *Stuloff N.* Электронный ресурс: http://www.deutsche-biographie.de/sfz28898.html – автор Николай Стулов, дополнительно его же Stuloff, Nikolai, Heine, Heinrich Eduard Simon“, in: Neue Deutsche Biographie. – 1969. – 8. – S. 292. Электронный ресурс: http://www.deutsche-biographie.de/pnd116659122.html

2. *Goebel M.* Heinrich Eduard Heine (1821–1881) Virtuelles Museum des Instituts fur Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg zur Geschichte der Mathematik in Wittenberg und Halle / 2. M. Goebel, K. Richter, H. Schlosser http://www.mathematik.uni-halle.de/history/heine/index.html / Leopoldina. – 1881. – 17. – S. 210; Chronik d. Univ. Halle-Wittenberg f. d. J. 1881, S. 6 f.; A. Wangerin, in: Mitteldt. Lb. III, 1928, S. 429-36 (*P*); Pogg. I, III. *– Zu T Anselma:* E. Heilborn, in: Frankfurter Ztg., 1930, Nr. 849; A. Jacker, in: Der Schriftsteller 17, 1930, H. 11; Kosch, Lit.-Lex. (*W*); Lex. D. Frau (*W*).

3. *Heine E.* Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen. // J. reine angew. Math., 26 (1843),S. 185–216.

4. *Heine E.* Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme. // J. reine angew. Math., 1845. – 29. – S. 185–208.

5. *Heine E.* Summation der Reihe (1). siehe unten // J. reine angew. Math. – 1846. – 31. – S. 133–135, Über die Reihe (2). – siehe unten (Aus einem Schreiben des Herrn Dr. Heine an Herrn Prof. Lejeune Dirichlet) J. reine angew. Math., 1846. – 32. – S. 210–212.

6. *Heine E.* Verwandlung von Reihen in Kettenbrüchen (Auszug eines Schreibens des Dr. E.Heine, Privatdozenten in Bonn, an den Prof. C.G.J. Jacobi in Berlin) // J. reine angew. Math., 1846. – 32. – S. 205–209.

7. *Heine E.* Untersuchungen über die Reihe (2) // J. reine angew. Math., 1847. – 34. – S. 285–328.

8. *Heine E.* Abriss einer Theorie der elliptischen Functionen. // J. reine angew. Math., 1850. – 39. – S. 122–137.

9. *Heine E.* Über die in der Gausschen „Summatio quarumdam serierum singularium“ vorkommenden Reihen // J. reine angew. Math., 1850. – 39 – S. 288–289.

10. *Heine E.* Theorie der Anziehung eines Ellipsoids // J. reine angew. Math., 1851. – 42. – S. 70–82.

11. *Heine E.* Der Eisensteinsche Satz über Reihen-Entwickelung algebraischer Functionen. // J. reine angew. Math., 1853. – 45. – S. 285–302.

12. *Heine E.* // Untersuchungen über ganze Functionen. // J. reine angew. Math., 1854. – 48. – S. 237–242.

13. *Heine E.* Fernere Untersuchungen über ganze Functionen. // J. reine angew. Math., 1854. – 48. – S. 243–266.

14. *Heine E.* Ueber die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen // J. reine angew. Math., 1854. – 48. – S. 267–275.

15. *Heine E.* Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1854. – S. 564–572.

16. *Heine E.* Nachtrag zu Potentiale einer Kreisscheibe.Bericht über die ... d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1855. – S. 306–308.

17. *Heine E.* Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmter Integrale // J. reine angew. Math., 50 (1855) S. 323–324.

18. *Heine E.* Der Übergang von den unbestimmten zu bestimmtem Integralen // J. reine angew. Math., 1856. – 51. – S. 383–401.

19. *Heine E.* Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form // J. reine angew. Math., 1857. – 53. – S. 199–230.

20. *Heine E.* Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn E. Heine an den Herausgeber // J. reine angew. Math., 1857. – 53. – S. 284–285.

21. *Heine E.* Bemerkungen zu Jacobi‘s Abhandlung über Variationsrechnung // J. reine angew. Math., 1857. –54. – S. 68–71.

22. *Heine E.* Lagrange‘s Umkehrungsformel // J. reine angew. Math., 1857. – 54. – S. 388.

23. *Heine E.* Über die binomische Reihe // J. reine angew. Math., 1858. – 55. – S. 279–280.

24. *Heine E.* Auszug eines Schreibens über die Lame‘schen Functionen an den Herausgeber. // J. reine angew. Math., 1859. – 56. – S. 79–86.

25. *Heine E.* Einige Eigenschaften der Lame‘schen Functionen // J. reine angew. Math., 1859 – 56. – S. 87–99.

26. *Heine E.* Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen // J. reine angew. Math., 1860. – 57. – S. 231–247.

27. *Heine E.* Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, 1861. – 382 s.

28. *Heine E.* // Die Lame‘schen Functionen verschiedener Ordnungen.// J. reine angew. Math., 1863. – 60. – S. 252–303.

29. *Heine E.* Der Abelsche Satz // J. reine angew. Math., 1863. – 61. – S. 276–282.

30. *Heine E.* Über einige bestimmte Integrale. // J. reine angew. Math., 1863. – 61. – S. 356–366.

31. *Heine E.* Die speciellen Lame‘schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung // J. reine angew. Math., 1863. – 62. – S. 110–141.

32. *Heine E.* Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie über die Existenz und Anzahl der Lame‘schen Function erster Art. Monatsbericht d. Königl.-Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1864. – S. 13–22.

33. *Heine E.* Das Newton‘sche Gesetz. Rektorratsrede vom 12 Juli 1864. Halle: Verl.d. Buchhandlung Waisenhaus, 1864.

34. *Heine E.* Über Kettenbrüche.Monatsbericht d. Königl.-Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1866. – S. 436–451.

35. *Heine E.* Mittheilung über Kettenbrüche (Auszug aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin) // J. reine angew. Math., 1867. – 67. – S. 315–326.

36. *Heine E.* Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen // J. reine angew. Math., 1868. – 68. – S. 386–389.

37. *Heine E.* Die Fourier–Besselsche Function // J. reine angew. Math., 69 (1869) S. 128–141.

38. *Heine E.* Ueber trigonometrische Reihen // J. reine angew. Math., 1870. – 71. – S. 353–365.

39. *Медведев Ф. А*. К истории понятия равномерной сходимости рядов / Ф. А. Медведев // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1974. – 19. – с. 75–93.

40. *Heine E.* Aus brieflichen Mittheilungen. Zur Variationsrechnung. // Clebsch Ann. 1870. – 2. – S. 187–191.

41. *Heine E.* Über einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichelt‘schen Principes. Nachrichten von d. Königlichen Gesellschaft d. Wissenschaften und d. G. a. Universität zu Göttingen, 1871. – vom 16 August. – Nr. 16. – S. 375–383.

42. *Heine E.* Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet‘schen Principes // Clebsch Ann. – 1871. – 4. – S. 626–632. Fußnote: Aus den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom 16. August 1871, mit Zusätzen des Verfassers.

43. *Kertész A.* Georg Cantor. Schöpfer der Mengenlehre // Debrecen,mitglied der Akademie. Bearbeitet von Manfred Stern – Acta Historica Leopoldina. Halle/ Saale. – 1983. – S. 19.

44. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 485 с.

45. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre // J. reine angew. Math., 1872. – 74. – S. 172–188.

46. *Heine E.* Das Potential eines homogenen Kreises // J. reine angew. Math., 1873. – 76. – S. 271–272.

47. *Heine E.* Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten // J. reine angew. Math, 1875. – 79. – S. 1–16. (= Monatsbericht d. Königl.Preuss. Akademie d. Wissenschaften. – 1874. – S. 186–187).

48. *Heine E.* Lettre a M. Re‘sal // Liouville J., 1876. – (3). – II. – S. 155–158.

49. *Heine E.* Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy // J. reine angew. Math, 1880. – 89. – S. 19–39.

50. *Heine E.* Ueber die Kugelfunction $P_n(\cos y)$ für ein unendliches n // J. reine angew. Math, 1881. – 90. – S. 329–331.

51. *Méray Ch.* Nouveau précis d’analyse infinitésimale // Publication F. Savy. – Paris., 1872. – I vol. XXIII + 310 p.

52. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа // Пер. с нем. С. О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4 изд. – 44 с.

53. *Kossak E.* Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried. // Werder. Gymn. – Berlin, 1872.

Глава X. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ У Р. ДЕДЕКИНДА И Г. КАНТОРА

Одним из основателей современного понятия непрерывности является Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд. Понимание непрерывности числовой прямой у математиков XIX века, как правило, основано на пределах последовательностей, за одним исключением – это определение через сечение. Алгебраические иррациональности приближались последовательностями ещё Эйлером и Кёстнером, критерий сходимости последовательностей был сформулирован Коши в 1821 году. В 1869 году Шарль Мере определил неизмеримые числа как пределы последовательностей, сходящихся к пределам, выражаемым не численно, а фиктивно, и ввёл для них отношение порядка. В 1872 году появились сразу три работы немецких математиков о понятии непрерывности: Эдварда Гейне «Лекции по теории функций », Георга Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов » и Рихарда Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа». При этом все трое неоднократно обсуждали этот вопрос в устных беседах между собой и с К. Вейерштрассом, учителем Кантора. Эдвард Гейне работал в университете Галле с 1856 года, по его приглашению Георг Кантор начал работать там же с 1869 года. В начале 1870-х годов Кантор познакомился с Дедекиндом, работавшим в Высшей технической школе (Technische Hochschule) своего родного города Брауншвейга. Они проводили вместе летнее время в Гарце и Интерлакене, и много переписывались.

Биография Р. Дедекинда

Рихард Дедекинд родился 5 октября 1831 года в Брауншвейге, родном городе Гаусса. Его предки были здесь известными людьми. Отец, Юлиус Левин Ульрих Дедекинд, сын врача и фармацевта, был правоведом, профессором права и администратором Collegium Carolinum – колледжа, существовавшего в Брауншвейге и в 1862 году преобразованного в университет. Этот колледж закончил в Гаусс, и в нём же учился Рихард Дедекинд.

Рис. 1. Рихард Дедекинд

Мать Дедекинда, Каролина Генриетта, урождённая Империус (Emperius) была дочерью профессора Carolinum и внучкой императорского почтмейстера (начальника почты). Рихард был младшим из четырёх детей. Его единственный брат, Адольф, стал в Брауншвейге председателем окружного суда, одна из его сестёр, Матильда, умерла в 1860. Другая сестра, Юлия, была писательницей (романисткой), с ней он прожил вторую половину своей жизни.

С 7 до 16 лет Дедекинд учился в гимназии, увлекаясь физикой и химией, но потом его интересы сместились к математике, придающей логическую структуру естественным наукам.

С 1848 по 1850 год он обучался в Коллегиум Каролинум, изучая элементы аналитической геометрии, алгебру, механику и анализ.

В итоге, когда Дедекинд в 1850 году поступил в Georgia Augusta (Геттингенский университет), он был гораздо лучше подготовлен, чем остальные студенты, пришедшие сразу после школы. Семинар по математике был организован для обучения инструкторов учителей гимназий. Дедекинд стал посещать этот семинар, где он подружился с Риманом. Отсюда началась их долгая дружба, продолжавшаяся до самой смерти Римана в 1866 году.

Весной 1850 года Дедекинд, как он вспоминает, прослушал элементы теории чисел в небольшом курсе Штерна (Stern, 1807–1894), который не был таким глубоким исследователем, как Гаусс, но преподавал гораздо лучше его [1].

В зимнем семестре 1850/51 года Дедекинд посещал лекции Гаусса по методу наименьших квадратов. Краткий отчёт Гаусса содержит информацию об этом курсе, но Дедекинд дал более полный отчёт о нём, хотя и краткий, но содержащий более интересные детали:

«В начале следующего зимнего семестра я решил, что достаточно подготовлен, чтобы слушать его лекции по методу наименьших квадратов, и вооружившись журналом посещения лекций, не без сердечного трепета, я вступил в его жилище, где увидел его сидящим за письменным столом. Моё сообщение, казалось, мало порадовало его, я слышал также, что он не любил вести курсы; после того, как он написал своё имя в журнале, он сказал после некоторой паузы: «Возможно, вы знаете, что всегда очень неясно, состоятся ли мои лекции; где вы живёте? У парикмахера Фогеля? Хорошо, это удачно, так как он также и мой парикмахер, я уведомлю вас через него несколькими днями позже. Через несколько дней Фогель, личность, известная всему городу, весь преисполненный важностью своей миссии, вошёл в мою комнату сказать мне, что несколько других студентов тоже записались, и тайный советник Гаусс будет читать курс.

Нас было девять студентов, все мы были очень старательны, редко кто-то из нас пропускал, хотя путь в обсерваторию зимой бывал иногда неприятен. Аудитория, выделенная из служебного помещения Гаусса как прихожая, была очень маленькой.

Мы сидели за столом, длинные стороны которого были удобны для троих, но не четверых. Напротив двери у внешнего края сидел Гаусс, и когда все мы присутствовали, то те двое из нас, кто приходил позже, должны были плотно придвигаться к нему и класть тетради на колени. Гаусс носил лёгкую чёрную шапочку, очень длинный коричневый кафтан, серые брюки; обычно он сидел в удобной позе, смотрел вниз, немного наклоняясь и положив согнутые руки на колени.

Он говорил без записей, довольно легко, очень понятно, просто и отчётливо; но когда он хотел сделать особое ударение на новом пункте, он использовал особенно характерные слова, затем он внезапно поднимал голову, поворачивался к одному или другому сидящему радом с ним, и пристально смотрел на него своими прекрасными проникновенными голубыми глазами. Это было незабываемо. Если он возвращался к пояснению принципов развития математических формул, то он вставал и в величавой, очень прямой позе, писал на доске возле него своим особым красивым почерком; он всегда экономно и продуманно распределял весьма небольшое пространство доски. Для числовых примеров, тщательному завершению которых он придавал большое значение, он приносил с собой необходимые данные на маленьких листочках бумаги.

24 января 1851 года Гаусс закончил изложение первой части своего курса, в котором он познакомил нас с основами своего метода наименьших квадратов. Далее последовало исключительно ясное развитие основных понятий и важных теорем анализа и вероятностей, иллюстрируемых оригинальными примерами, которые служили введением во вторую и третью методику установленного метода, в который я должен был углубляться. Могу только сказать, что мы следили за ним с неослабевающим интересом в этих искусных лекциях, где уже были рассмотрены несколько примеров из теории определённых интегралов. Но нам, как и самому Гауссу, который сначала неохотно согласился читать этот курс, казалось, что он стал испытывать некоторое удовольствие, обучая нас. Конец наступил 13 марта, Гаусс встал, все мы были вокруг него, и он отпустил нас с дружескими прощальными словами: «Мне остаётся только поблагодарить вас за большое старание и внимание, с которым вы слушали мои лекции, возможно, изложенные слишком сухо». Полвека прошло с тех пор, но эти так называемые сухие лекции навечно остались в моей памяти как самые лучшие из всех, что я когда-либо слушал» [2].

В следующем семестре Дедекинд снова слушал лекции Гаусса по углублённой геодезии. В 1852 году, всего лишь после четырёх семестров, он завершил свою докторскую работу под руководством Гаусса, став последним из его студентов, написав диссертацию по теории интегралов Эйлера. Гаусс свидетельствовал, что Дедекинд очень много знал и был самостоятелен, вдобавок имел «благоприятные многообещающие виды на будущее».

Однако Дедекинд не выполнил достаточных требований для получения права на работу после окончания Georgia Augusta (Университет Геттингена), и поэтому он провёл ещё два года, заполняя пробелы, и стал готов квалифицироваться как приват-доцент через несколько недель после Римана. После того, как в 1855 году в Геттинген приехал Дирихле (1805–1859), чтобы после смерти Гаусса занять его место профессора высшей математики, Дедекинд посещал его лекции по теории чисел, теории потенциала, неопределённым интегралам и уравнениям в частных производных. Влияние Дирихле на Дедекинда было огромно, Дедекинд признавался, что общение с Дирихле сделало его новым человеком. Вскоре между ними завязались тесные дружеские отношения, и он вошёл в круг знакомых Дирихле.

Интересы Дедекинда постепенно сместились от эллиптических и абелевых функций к теории Галуа, он первым начал преподавание его теории в Геттингенском университете. В 1858 году Дедекинд был приглашён преподавать в Техническом университете Цюриха. В 1859 году он вместе с Риманом совершил поездку в Берлин, где встречался с Вейерштрассом и Куммером.

В 1862 году в его родном Брауншвейге училище Collegium Carolinum был преобразован в Технический институт (сейчас Технический университет Брауншвейга), Дедекинд вернулся туда и преподавал в нём до 1894 года. Он никогда не был женат и прожил остаток своей жизни со своей незамужней сестрой Юлией.

Дедекинд избирался членом Берлинской (1880 год), Римской и Французской (1900 год) Академий наук. Он получил докторские степени в университетах Осло, Цюриха и Брауншвейга. Известно, что скромность и научная молчаливость Дедекинда привела к тому, что в 1904 году «Математический календарь» опубликовал сообщение о смерти Дедекинда, якобы случившейся 4 сентября 1899 года. В письме редактору Дедекинд написал: «По моим собственным наблюдениям я в тот день был вполне здоров и вёл оживлённый разговор о теории множеств с моим гостем и уважаемым другом Георгом Кантором (из Галле), который в связи с этим нанёс мне смертельный удар, но не мне самому, а сделанной мною ошибке» [3].

В 1871 году Дедекинд, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, вводит в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца, идеалы и модули. Совместно с Л. Кронекером он создаёт общую теорию делимости. Исследования Дедекинда были изданы в виде приложения к «Теории чисел» Дирихле 1863 года [4], и перерабатывались им в последующих изданиях. Биограф Дедекинда Эдвардс (H. M. Edwards) полагает, что посмертное издание лекций по теории чисел Дирихле в действительности написано Дедекиндом [5]. Сам Дедекинд в письме Кантору 19 января 1879 года писал: «Я полностью занят переработкой теории чисел Дирихле»[85] [6]. Можно лишь сожалеть, что русский перевод лекций Дирихле по теории чисел не содержит знаменитого XI Дополнения, написанного Дедекиндом, в котором находится теория идеалов.

Дальнейшее развитие оснований высшей алгебры во многом обязано открытиям Дедекинда.

В течение всей его жизни его отличала большая научная порядочность и деликатность. Он принимал участие в изданиях Гаусса, Римана (1868 год, «О представлении функций при помощи тригонометрических рядов» и «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», а в 1876 году вместе с Вебером издал сочинения Римана, написав большой биографический очерк), Дирихле, и считал этот труд более важным, нежели публикацию собственных результатов.

В начале 1870-х годов Дедекинд знакомится с Георгом Кантором. Знакомство перешло в долголетнюю дружбу и сотрудничество; их отношения сопровождал горячий интерес, увлечённость теорией множеств, иногда раздражение, отчуждение и прекращение переписки. Оба они любили проводить лето в горах Германии и Швейцарии, где и познакомились. Их объединила любовь к математике и музыке. Кантор играл на скрипке, Дедекинд на виолончели. Бурное желание двадцатисемилетнего Кантора найти понимающего собеседника и советчика развеяло сомнения Дедекинда в важности его собственных размышлений о построении теории числа средствами теории множеств. Наряду с Кантором, Дедекинд считается основателем теории множеств. Многие его работы стали наглядным примером применения новых методов. Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел в 1888 году в работе «Что такое числа и для чего они служат?» [7].

Он вводит основные операции над множествами (включение, пересечение, сумма) в том объёме, которые нужны ему для операций над

---

[85] Имеется в виду работа Дедекинда над третьим изданием лекций Дирихле, которой он объединяет свои дополнения.

множеством алгебраических чисел, обобщает понятие отображения, вводит понятие цепи. Система аксиом арифметики, сформулированная здесь Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано (1858–1932), чьё имя за ней и закрепилось [8], но ещё до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом.

В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Определение числа, данное Дедекиндом, включено в курсы современного математического анализа.

Рис. 2. Рихард Дедекинд

Непрерывность и число у Дедекинда

В период работы профессором в Политехнической школе Цюриха Дедекинд читал курс математического анализа, и, как он сам замечает, ощутил недостаток в научном обосновании арифметики. Геометрическая интерпретация приближения переменной величины к пределу не могла быть строго научной, хотя и удобна в преподавании. Дедекинд поставил себе целью дать чисто арифметическое определение непрерывности, которое будет достаточным основанием анализа бесконечно малых. Как пишет сам Дедекинд: «Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и несколько дней спустя я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège'у, что привело к продолжительной и оживлённой беседе[86]. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал об этом предмете доклад в учёном обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представляется нелёгким, и потому ещё, что самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта [1872 года], в то время как я наполовину стал уже подумывать, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[87], ко мне в руки попала, благодаря любезности её автора, статья E. Heine (Crelle Journal, Bd. 74)[88], которая и подкрепила меня в моём решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что моё изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 года), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G. Cantor`a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd.5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома[89] в §2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения,

---

[86] Дюреж Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

[87] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца. – *Примечание С. О. Шатуновского* [9]. Юлиус Левин Ульрих Дедекинд (1795–1872) был профессором-юристом, историком и чиновником в Коллегиум Каролинум, как до 1862 года называлась Высшая техническая школа в Брауншвейге.

[88] В этой статье «Лекции по теории функций» Э. Гейне вводит понятие непрерывности с помощью фундаментальных последовательностей, используя, как он сам признаёт, некоторые результаты Г. Кантора.

[89] «Каждой числовой величине соответствует определённая точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в указанном параграфе, и обратно».[6, с. 13].

с тем, что я отмечаю ниже в § 3, как сущность непрерывности[90]. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел ещё более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, ещё признать не в состоянии[91]» [9].

Дедекинд рассматривает свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел *R* (числового корпуса, термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старается избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено как к одному, так и к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии.

Но на прямой есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу, например, величина диагонали квадрата с единичной стороной. Отсюда следует необходимость арифметическим путём дополнить множество рациональных чисел, чтобы область новых чисел обрела такую же полноту или непрерывность, что и прямая. Ранее понятие иррациональных чисел было связано с измерением протяженных величин, то есть с геометрическими представлениями. Дедекинд стремится ввести новое понятие чисто арифметическими средствами, то есть определить иррациональные числа посредством рациональных чисел:

«Предыдущее сравнение области *R* рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъянов, неполноты, или разрывности,

---

[90] «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска».[9, с. 17].

[91] Дедекинд имеет в виду понятие предельной точки и производного множества, определяемого Кантором в работе 1872 года.

между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чём же собственно состоит непрерывность? Всё и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, многого не достигнешь. Дело идёт о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашёл искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но всё же я думаю, что большинство найдёт её содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка p прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т. е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [9, с. 17–18].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Далее Дедекинд переходит к построению иррациональных чисел. Он называет сечением деление множества рациональных чисел любым числом, обращая внимание на то, что либо в одном классе есть наибольшее, либо в другом классе есть наименьшее, и обратно, если сечение обладает этим свойством, то оно производится либо наименьшим, либо наибольшим числом. В то же время существует бесконечно много сечений, которые не могут быть произведены рациональным числом. Например, если D есть целое число, не являющееся квадратным, то существует целое положительное число λ, такое, что $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$. Таким образом получается, что в одном классе нет наибольшего, а в другом классе нет наименьшего числа, производящего это сечение, в чём и состоит неполнота, или разрывность области рациональных чисел. В таком случае, если сечение не может быть произведено рациональным числом, создадим новое, иррациональное число, которое создаёт это сечение. Каждому определённому сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число. Два числа неравны, если они соответствуют различным сечениям. Между ними можно определить отношения «больше» или «меньше».

Дедекинд рассматривает непрерывность области R вещественных чисел: «Область R обладает ещё и непрерывностью, то есть имеет место следующее предложение: если система R всех действительных чисел распадается на два класса a_1 и a_2 такого рода, что каждое число α_1 класса a_1 меньше каждого числа α_2 класса a_2, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение» [9, с. 25].

Дедекинд определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций: «Если число λ есть результат вычислений, совершённых над числами α, β, γ, …, и если λ лежит внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которых лежат числа α, β, γ, …) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ,…заменены числами соответственных интервалов A, B, C, …, будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала L» [9, с. 28]. Дедекинд сетует на трудность изложения этой теоремы, что облегчается с введением понятий переменных величин, функций и пределов. Заметим, что несмотря на то, что работа была написана в 1872 году, Дедекинд не пользуется уже разработанным аппаратом математического анализа, сделанным Вейерштрассом, в частности, его языком ε–δ. Понятие предела носит у него качественный оттенок. Дедекинд по существу использует только те аспекты непрерывности, которые нужны ему для обоснования понятия числа и арифметических операций над числами средствами теории множеств.

Дедекинд устанавливает зависимость введённых им понятий с основными положениями анализа бесконечных. Определение предела он даёт в таком виде: «Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определённые численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x - \alpha$, взятая абсолютно, опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля» [9, с. 29].

Дедекинд доказывает теорему: «Если величина *x* возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу» [9, с. 29].

На этом заканчивается работа Дедекинда «Непрерывнось и иррациональные числа». Как мы видим, определение понятий непрерывности и действительного числа безупречно с логической точки зрения, оно носит юридический оттенок, но представление об объёме и структуре понятия из него не следует. Математики, определив число таким способом, переходят в построениях к более функциональному определению числа Кантора.

Заметим, что одновременно вышедшая статья Гейне «Лекции по теории функций» [11] 1872 года содержала определение числа, данное Кантором, и незадолго до них во Франции вышла работа Шарля Мере с таким же построением [12], но оставшаяся не оценённой соотечественниками, а в Германии она осталась неизвестной из-за франко-прусской войны. Мере, определив иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, на этом останавливается [13]. Гейне и Кантор идут дальше, образуя новые последовательности из иррациональных чисел, а Кантор строит производные множества.

Иррациональные числа у Г. Кантора

Рис. 3. Георг Кантор

Сравним эту работу Дедекинда с чуть опередившей её упомянутой работой Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [6, с. 9–18]. Здесь Кантор строит множество числовых величин, которое мы теперь называем действительными числами, дополняя множество рациональных чисел иррациональными, с помощью последовательностей рациональных чисел, названными им фундаментальными, то есть удовлетворяющих критерию Коши. Для них определяется отношение «равно», «больше», «меньше».

Точно так же можно утверждать, говорит Кантор, что последовательность может находиться к рациональному числу a в одном из трёх отношений, что влечёт $b = a$, $b > a$, $b < a$. Отсюда в качестве следствия получается, что если b – предел последовательности, то $b - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n. Совокупность рациональных чисел Кантор называет областью A, совокупность всех числовых величин b называет B. На взятые вместе области A и B можно распространить применяемые конечное число раз числовые операции, принятые для рациональных чисел (сложение, вычитание, умножение, деление, если делитель ненулевой). Тогда область A (рациональных чисел) получается из области B (иррациональных чисел) и вместе с ней образует новую область C. А именно, если задана числовая последовательность чисел b_1, b_2,..., b_n,... числовых величин из A и B, не все из которых принадлежат области A, и если эта последовательность обладает тем свойством, что $b_{n+m} - b_n$ становится бесконечно малой при возрастании n и любом m, то об этой последовательности говорят, что она имеет определённый предел c. Числовые величины c образуют область C. Отношения равенства, больше, меньше и элементарные операции определяются аналогично предыдущим случаям. Но даже установленное равенство двух величин b и b' из B не влечёт их идентичности, а лишь выражает некоторое определённое отношение между последовательностями, которым они сопоставляются.

Из области C и предшествующих ей аналогично получается область D, из всех их – область E и т. д.; посредством λ таких переходов получается область L. Понятие числа, как оно развито здесь, несёт в себе зародыш необходимого и абсолютно бесконечного обобщения. *Числовая величина*, *значение* и *предел* Кантор употребляет как равнозначные. Для сравнения с этим параграфом Кантор ссылается на X книгу «Начал» Евклида[92].

---

[92] В X книге «Начал» представлена классификация несоизмеримых величин.

Далее Кантор рассматривает точки на прямой, определяя расстояние между ними как предел последовательности, и вводя отношения «больше», «меньше» и «равно». Он вводит аксиому, что, и обратно, каждой числовой величине соответствует точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в этом параграфе. Кантор называет это утверждение аксиомой, так как оно недоказуемо по самой его природе. Благодаря ей числовые величины дополнительно приобретают определённую предметность, от которой они, однако, совершенно не зависят.

В соответствии со сказанным выше Кантор рассматривает точку на прямой как определённую, если её расстояние от 0, рассматриваемое с определённым знаком, задано как числовая величина, значение, или предел λ-вида.

Далее Кантор определяет точечные множества или множества значений, и вводит понятие предельной точки[93] точечного множества. Под окрестностью понимается любой интервал, содержащий эту точку внутри себя. Таким образом, вместе с точечным множеством задаётся и множество его предельных точек. Оно называется первым производным точечным множеством. Если оно состоит из бесконечного числа точек, из него можно образовать второе производное множество и так далее.

Введение понятия предельной точки (точки сгущения) было плодотворным. Его сразу же начали использовать другие математики – Г. Шварц, У. Дини [14].

Г. Кантор о сравнении различных способов введения понятия числа и непрерывности

28 апреля 1872 года, получив работу Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа», Кантор писал ему: «Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришёл несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убеждён, что Вы правильно выявили сущность непрерывности» [6, с. 327].

---

[93] Сейчас мы говорим «точка сгущения» - такая точка, в каждой окрестности которой содержится бесконечно много точек данного множества и может быть, и она сама.

Правда, в их последующей переписке содержится полемика о способе определения непрерывности, и в 1882 году Кантор пишет Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт – счётные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) – кажутся годящимися для этой попытки» [6, с. 356].

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность определения непрерывности через сечение. В 1879 году он делает попытку использовать теорему о корневом интервале[94] для доказательства невозможности непрерывного и двусторонне однозначного отображения между двумя различными многообразиями разных порядков[95].

В 1883 году Кантор, анализируя различные формы введения числа, в цикле работ «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» (§ 9, с. 81–87), писал: «Я хотел бы вкратце и построже сказать о трёх известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это *прежде всего* способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях профессор Вейерштрасс и некоторые намёки на которые можно найти в программной работе г-на Э. Коссака (Die Elemente der Arithmetik. Berlin 1872). *Во-вторых*, г-н Р. Дедекинд в своём сочинении «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (Braunschweig 1872) опубликовал своеобразную форму определения. *В-третьих*, в 1871 году я предложил (Math. Ann. 1872, Bd. 5, S. 123) форму определения, внешне имеющую сходство с вейерштрассовской… На мой взгляд, эта *третья…* является самой простой и естественной из всех и имеет ещё то

---

[94] Теорему, называемую ныне теоремой Больцано–Коши: непрерывная функция, имеющая разные знаки на краях интервала, внутри интервала достигает нулевого значения. Это утверждение впервые высказал Мишель Ролль в 1690 году применительно к алгебраическим уравнениям.

[95] Эта попытка доказательства изложена Кантором в статье «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten, пер. Ф.А. Медведева) [6, с. 36–39].

преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений» [6, с. 81].

«Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа.

При *первой* форме определения в основу кладётся множество положительных рациональных чисел a_ν, которое будет обозначаться (a_ν) и которое удовлетворяет тому условию, что, сколько бы и каких из этих a_ν мы ни суммировали в конечном количестве, эта сумма всегда остаётся меньше некоторой заданной границы. Теперь если мы имеем две подобных совокупности (a_ν) и (a'_ν), то строго доказывается, что могут представиться три случая: или каждая часть $1/n$ единицы всегда встречается одинаково часто в обеих совокупностях, если только их элементы суммируются в достаточном, доступном увеличению количестве, или $1/n$, начиная с известного n, всегда содержится чаще в первой совокупности, чем во второй; или наконец, $1/n$, начиная с известного n, всегда содержится чаще во второй совокупности, чем в первой. Соответственно этим случаям мы полагаем, обозначая через b и b' определяемые этими двумя совокупностями (a_ν) и (a'_ν) числа, что в первом случае $b = b'$, во втором $b > b'$, в третьем $b < b'$. Если мы соединим обе совокупности в одну новую совокупность $(a_\nu + a'_\nu)$, то это даёт основу для определения $b + b'$. Если же из двух совокупностей (a_ν) и (a'_ν) образовать новую совокупность $(a_\nu a'_\nu)$, элементы которой являются произведениями из всех (a_ν) на все (a'_ν), то эта новая совокупность принимается в качестве основы определения bb'.

Мы видим, что здесь момент порождения, связывающий множество с порождаемым им числом, заключается в *образовании сумм*. Но следует подчеркнуть как *существенное* то, что здесь оперируют только суммированием всегда *конечного* количества рациональных элементов, а *не* полагается заранее, например, что определяемое число b равно сумме Σa_ν бесконечного ряда (a_ν). В этом заключалась бы *логическая ошибка*, ибо, скорее, определение суммы Σa_ν получается только путём приравнивания её непременно уже определённому заранее готовому числу b. Я думаю, что эта логическая ошибка, которой впервые избегнул Вейерштрасс, совершалась почти всеми и не была замечена лишь потому, что она относится к тем редким случаям, когда действительная ошибка не может причинить большого вреда в исчислении. Несмотря на это, с вышеуказанной ошибкой связаны, по моему мнению, все те трудности, которые заключаются в понятии иррационального, между тем как если избегнуть этой ошибки, то иррациональное число занимает место в нашем духе с такой же определённостью, ясностью и отчётливостью, как и рациональное число.

В форме определения г-на Дедекинда в основу кладётся *совокупность всех* рациональных чисел, но разделённых на две группы таким образом, что если мы обозначим числа первой группы U_ν, а числа второй группы через B_μ, то всегда $U_\nu < B_\mu$. Подобное деление множества рациональных чисел г-н Дедекинд называет его «сечением», обозначает через $(U_\nu \mid B_\mu)$ и сопоставляет ему число b. Если сравнить два подобных сечения $(U_\nu \mid B_\mu)$ и $(U'_\nu \mid B'_\mu)$ друг с другом, то, как и при *первой* форме определения оказывается всего *три* возможности, соответственно которым представленные обоими сечениями числа b и b' или приравниваются друг к другу, или принимается, что $b > b'$, или $b < b'$. Первый случай имеет место – если отвлечься от некоторых, легко регулируемых исключений, возникающих при рациональности определяемых чисел – лишь при полном тождестве обоих сечений. В этом наблюдается решительное и безусловное преимущество данной формы определения по сравнению с обеими другими, а именно то, что каждому числу b соответствует лишь *единственное* сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе *никогда* не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом.

И здесь затем следуют определения в виде суммы $b + b'$ и произведения bb' на основе новых сечений, получаемых из двух заданных.

Недостаток, связанный с *первой* и *третьей* формами определения, а именно, что здесь одни и те же, т. е. равные числа, представляются бесконечно часто, и что, таким образом, не получается непосредственно однозначного обозрения всех действительных чисел, можно весьма легко устранить путём специализации положенных в основу множеств (a_ν), если привлечь к рассмотрению какую-либо из известных однозначных систем, вроде десятичной системы или разложения в простые цепные дроби.

Перейду теперь к *третьей* форме определения действительных чисел. И здесь в основу кладётся бесконечное множество рациональных чисел (a_ν) первой мощности, но теперь ему приписывается другое свойство, чем в теории Вейерштрасса, а именно: я требую, чтобы взяв произвольно малое рациональное число ε, можно было бы так удалить конечное число членов множества, чтобы оставшиеся имели попарно разность, которая по абсолютной величине меньше ε. Всякое такое множество (a_ν), которое можно также охарактеризовать равенством $\underset{\nu=\infty}{Lim}\left(a_{\nu+\mu}-a_\nu\right)=0$ (при произвольном μ), я называю *фундаментальной последовательностью* и сопоставляю ему некоторое определяемое им число b, для которого целесообразно даже воспользоваться самим знаком (a_ν), как это сделано у г-на Гейне, который в этих вопросах после многих устных обсуждений присоединился к моим взглядам (См. Журнал Крелле, т. 74, с. 172). Подобная *фундаментальная последовательность*, как можно строго вывести из её понятия, приводит к трём случаям: или её члены a_ν для достаточно больших значений ν по абсолютной величине меньше, чем любое наперёд заданное число; или они начиная с некоторого ν больше определённо заданного положительного рационального числа ρ, или же они начиная с известного ν меньше некоторой определённо заданной отрицательной рациональной величины $-\rho$. В первом случае я говорю, что b равно нулю, во втором, что b больше нуля или положительно, в третьем, что b меньше нуля или отрицательно.

Затем переходим к элементарным операциям – сумма, произведение, частное, в том числе и между рациональным a и иррациональным числом.

Лишь теперь мы переходим к определению равенства и обоих случаев неравенства двух чисел b и b' (из которых b' может также равняться a), говоря при этом $b = b'$, $b > b'$ или $b < b'$ в зависимости от того, равна ли нулю, больше нуля или меньше нуля разность $b - b'$.

После всех этих подготовительных рассуждений получается в качестве первой *строго доказуемой* теоремы, что если b есть число, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), то $b - a_\nu$ при возрастании ν становится по абсолютной величине меньше, чем любое мыслимое рациональное число, или иначе, что $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{Lim}}\, a_\nu = b$.

Следует обратить внимание на следующий кардинальный пункт, значение которого легко пропустить: в случае третьей формы определения число b не определяется вовсе как «предел» членов a_ν фундаментальной последовательности (a_ν). Принять это, значит совершить такую же логическую ошибку, как та, о которой мы говорили при рассмотрении *первой* формы определения, и именно на том основании, что тогда предполагается наперёд существование предела $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu = b$. Скорее, дело обстоит обратным образом, а именно так, что благодаря нашим предыдущим определениям понятию числа b приписываются такие свойства и отношения к рациональным числам, что отсюда можно с логической очевидностью вывести заключение: $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu$ существует и равен b. Да простят мне все эти подробности, которые оправдываются тем, что большинство проходят мимо этих неприметных деталей и затем легко натыкаются на противоречия в иррациональных числах, ставя их под сомнения, между тем как соблюдение указанных здесь предосторожностей легко предохранило бы их от этого. Действительно, они тогда ясно поняли бы, что иррациональное число благодаря *приданным ему нашим определением свойствам* является такой же реальностью для нашего духа [6, с. 84–85], как рациональное и даже как целое рациональное число, и что вовсе нет нужды *получать* его путём предельного процесса, а что, скорее, наоборот, *располагая* этими свойствами, можно общим образом убедиться в пригодности и очевидности предельных процессов. Ведь приведённую выше теорему легко обобщить следующим образом: если (b_ν) представляет собой какое-нибудь множество рациональных или иррациональных чисел, обладающее тем свойством, что $\lim_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu}-b_\nu\right)=0$ (каково бы ни было μ), то существует некоторое число b, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), и такое, что $\underset{\nu=\infty}{Lim}\, b_\nu = b$.

Оказывается, следовательно, что *те самые* числа b, которые были определены на основании фундаментальных последовательностей (a_ν) (я называю эти фундаментальные последовательности последовательностями первого порядка) таким образом, что они оказываются пределами a_ν, могут быть представлены различными способами и как пределы последовательностей (b_ν), где каждое b_ν определяется с помощью фундаментальной последовательности первого порядка $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ (с фиксированным ν) [6, с. 85].

Поэтому любое подобное множество (b_ν), если оно обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu}-b_\nu\right)=0$ (при произвольном μ), я называю фундаментальной последовательностью *второго* порядка.

Точно так же можно образовать фундаментальные последовательности *третьего*, *четвёртого*,…, *n*-го порядка, а также фундаментальные последовательности порядка α, где α – любое число второго числового класса.

Все эти фундаментальные последовательности дают для определения какого-либо действительного числа b то же самое, что и фундаментальные последовательности первого порядка. Всё различие заключается лишь в более сложной, пространной форме задания. (…).

Я пользуюсь теперь следующим способом выражения: числовая величина b дана фундаментальной последовательностью n-го, соответственно, порядка α. Если решиться на это, то мы получаем таким путём необыкновенно лёгкий и в то же время понятный язык, чтобы описать наиболее простым и выпуклым образом всю полноту многообразных, часто столь сложных образований анализа. Благодаря этому получится, на мой взгляд, серьёзный выигрыш в ясности и прозрачности изложения. Тем самым я возражаю против опасений, высказанных г. Дедекиндом в предисловии к его сочинению «Непрерывность и иррациональные числа». Мне вовсе не приходило в голову вводить с помощью фундаментальных последовательностей второго, третьего и т. д. [6, с. 86] порядков новые числа, которые не были бы определены уже с помощью фундаментальных последовательностей первого порядка: я имел в виду лишь понятийно различную форму задания. Это ясно вытекает из различных мест моей работы.

Я хотел бы здесь обратить внимание на одно замечательное обстоятельство, а именно, что порядки фундаментальных последовательностей, различаемые мною с помощью чисел первого и второго числового классов, совершенно исчерпывают все мыслимые в анализе, уже найденные и не найденные формы обычных типов последовательностей, исчерпывают в том смысле, что нет вовсе фундаментальных последовательностей, – как я это строго докажу при других обстоятельствах, – порядковое число которых можно было бы обозначить каким-нибудь числом, например, третьего числового класса» [6, с. 85].

К. Вейерштрасс

В 1886 году Вейерштрасс читал дополнительные лекции к теории аналитических функций [15], посвящённые обоснованию понятия числа, в которых дал попытку критического анализа и обобщения введённых Кантором, Гейне и Дедекиндом понятия числа и непрерывности. Он обращается к теореме Больцано (теореме о корневом интервале) и доказывает её, избегая геометрических и физических представлений. Обобщение Вейерштрассом концепций Кантора и Дедекинда потребовало анализа понятий окрестности и точной верхней границы, и привело к формированию свойств метрического и топологического пространства, что было формализовано лишь в 1904–1906 годах М. Фреше и в 1912–1914 годах Ф. Хаусдорфом.

Рис. 4. Карл Вейерштрасс

Литература к X главе

1. *Eminger S.* Moritz Abraham Stern. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stern.html

2. *James I.* From Euler to von Neumann. – Cambridge University Press, 2002. – P. 195–198.

3. *Landau E.* Richard Dedekind. Nachrichten von der K. Gesellsch. Der Wiss. Zu Gottingen. Gesch. Mitt. Aus dem Jahre 1917. – S. 50–70.

4. *Lejeune Dirichlet P.* Vorlesungen über Zachlentheorie. Herausgegeben von R. Dedekind. – Braunschweig, 1863, 1871, 1879, 1894. – 414 s.

5. *Edwards, H. M.* Dedekind's invention of ideals // Bull. London Math. Soc. 15, 1983. PP. 8–17.

6. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985. – 485 с.

7. *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig. – 1888, в русском переводе. – Казань, 1905.

8. *Peano G.* Arithmetices principia, nova method exposita. – Romae, 1889. – XVI+20 p.

9. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. Одесса: Матезис. – Одесса. – 1923 г. пер. С. О. Шатуновского. 4-е исправл. изд. – С. 10–11.

10. *Sonar Th.* Brunswick\`s Second Mathematical Star: Richard Dedekind (1831–1916) / Th. Sonar. – Springer Science+Busness Media, LLC. – 2012. – Vol. 34. – No. 2. – P. 63–67.

11. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. 74 (1872) P. 172–188.

12. *Méray Ch.* Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat. 1869. – (2) 4. – P. 280–289.

13. *Méray Ch.* Nouveau précis d'analyse infinitésimale / Charles Méray, Accien éleve de l'Ecoles Normale, Proffesseur à la Faculté des Sciences de Dijon. – Paris: F. Savy, Libraire-éditeur, 1872. – 310 s.

14. *Dini U.* Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. – 1878. – VIII. –407 P.

15. *Weierstrass K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner–Archiv für mathematic. – Band 9. – 272 s. Reprint 1989.

Глава XI. ПОНЯТИЕ СВЯЗНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ XIX ВЕКА. Г. КАНТОР И К. ВЕЙЕРШТРАСС

Топология ведёт свою историю с задачи о кёнигсбергских мостах, поставленной и решённой Л. Эйлером в 1736 году [1].

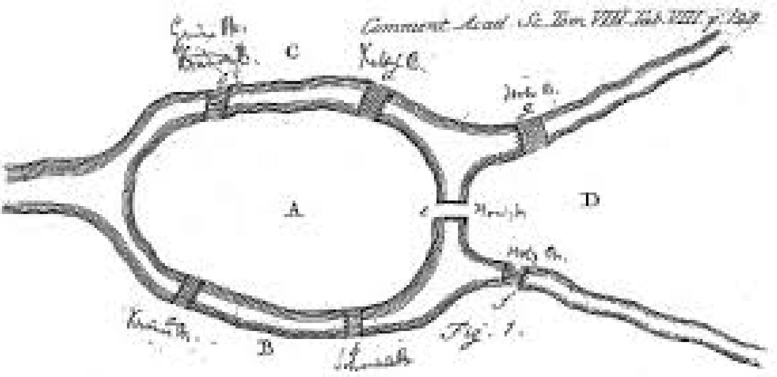


Рис. 1. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах

Первая работа, в которой топология получает своё название, была написана Листингом в 1848 году [2]. И. Б. Листинг (1808–1882) был профессором Геттингенского университета, где преподавал Гаусс и где учился Риман. Как и Риман, Листинг уделяет основное внимание комбинаторным свойствам преобразований и ещё не мыслит область как точечное множество. В 1862 году Листинг продолжил комбинаторную топологическую тему в работе «Описание пространственного многообразия или обобщение теоремы Эйлера о многограннике» [3]. Это был ранний период развития топологии, ещё до появления работ Г. Кантора (1845–1918) по теории множеств.

Рис. 2. Иоганн Бенедикт Листинг

Понятие связности впервые появляется у Б. Римана (1826–1866) в диссертации «Основания теории функций комплексной переменной» (1851 год), в докладе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 год) и в «Теории абелевых функций» (1857 год). Риман рассматривал пространство в реально-физическом смысле, а не как точечное множество; поверхность рассматривал как лист, разостланный по плоскости или над плоскостью [4, с. 52]; односвязной называл «кусок» поверхности, ограниченный замкнутой несамопересекающейся кривой. В «Основах общей теории функций одной комплексной переменной» 1851 года Риман писал: «Две части поверхности считаем связными, если из точки одной части в точку другой части можно провести кривую, принадлежащую поверхности; в противном случае две части поверхности называются несвязными или отдельно расположенными» [4, С. 54].

Рис. 3. Георг Фридрих Бернхард Риман

Понятие связности в работах Г. Кантора

Топология получила новое направление с появлением теории множеств Кантора в период с 1872–1884 годов. Кантор начинал с анализа сходимости тригонометрических рядов и анализа точек на прямой, и в первых своих работах создал теорию точечных областей. Он ввёл понятие действительного числа на основании фундаментальной последовательности, развил понятие предельной точки, данное Вейерштрассом в 1865 году, на её основе создал понятие производного множества, а также и равномерной сходимости[96]. Затем он построил иерархию бесконечных множеств, что привело его к трансфинитным числам. Кантора интересовала природа континуума и многие его исследования приводили к топологическим результатам, например, вопрос о возможности взаимно-однозначного отображения двумерного континуума на область действительных чисел (1878 год). В период с 1879 по 1884 год Кантор опубликовал цикл из шести статей «О бесконечных линейных точечных

---

[96] Одновременно с Э. Гейне, который уступал приоритет Кантору.

многообразиях» [5, С. 40–139], в которых содержатся основные его результаты по теории множеств. Кантор определил множества первого рода, у которых n-е производное множество пусто, и все остальные – множества второго рода. Ввёл понятие плотности в интервале и показал, что множества первого рода нигде не плотны в интервале, показал счётность множеств первого рода и некоторых второго рода. Ввёл понятие изолированного множества как не содержащего своих предельных точек, и доказал счётность изолированных множеств в R^n. В пятой работе Кантор ввёл трансфинитные порядковые числа и сформулировал гипотезу континуума, а также рассмотрел вопрос, о том, когда подмножество из R^n может быть названо «континуумом». Для этого он определил понятие совершенного[97] множества и связного точечного множества. Совершенное множество по определению совпадает со своим производным. Множество T по определению связно, если t и t' из T для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число точек t_1, t_2,...,t_n из T, что все расстояния $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, \ldots, t_{n-1}t_n, t_nt'$ не превосходят ε. Подмножество R^n определёно как континуум, если оно совершенно и связно.

В восьмидесятые годы XIX века в работах немецких математиков по математическому анализу появилось много новых результатов и понятий, которые нужно было привести к строгому единообразию. Как пишет Кетсиер, «Коши создал новый концептуальный аппарат, чтобы дать прочную основу существовавшего анализа, и в его математике функция всегда останется связана с формулой. Во второй половине XIX века концептуальный аппарат сам стал объектом исследования. Это произошло с обобщением понятия функции: она стала произвольным соответствием между числами» [6, с. 3]. В то же время теория действительного числа ещё была недостаточно развита – хотя имелись различные определения иррационального числа, но не было известно, как много иррациональных чисел по сравнению с рациональными числами[98], есть ли ещё другие, неопределяемые с помощью последовательностей числа, а главное, – как распределены иррациональные числа на числовой прямой. Теорема о равномерной непрерывности была сформулирована для функции, заключённой между двумя рациональными пределами. Вейерштрасс отдавал себе отчёт, что построение действительных чисел происходит умозрительно, «в мире наших мыслей», и стремился согласовать

---

[97] Совершенным Кантор назвал множество, содержащее все свои предельные точки.

[98] Это показал Кантор в работах 1874–1878 годов.

арифметическое понимание числа и общее понимание величины как результата измерения геометрического или физического объекта. Наряду с увеличением значения понятия иррациональных чисел росла и критика расширения понятия действительного числа. Коллега Вейерштрасса по Берлинскому университету Л. Кронекер (1823–1891) резко выступал против теорий Вейерштрасса и Кантора, утверждая, что все числа должны быть выражаемы через натуральные и их отношения. Его резкие выступления как в публикациях, так и в коллегиальном кругу, и даже в лекциях для студентов, были направлены на необоснованность теории функций Вейерштрасса [7, с. 327]. Клейн рассказывает о переживаниях Вейерштрасса по поводу нападок Кронекера, изложенных в письме Вейерштрасса к С. Ковалевской 24 марта 1885 года. Видимо, желание защититься и продемонстрировать обоснованность теории функций в свете нового понимания действительного числа и вызвали у Вейерштрасса намерение прочитать дополнительный курс лекций, посвящённый основаниям анализа. Он осуществил это в 1886 году.

О лекциях К. Вейерштрасса 1886 года

Рис. 4. Карл Вейерштрасс

Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции в Берлинском Промышленном институте и Берлинском университете с 1856 года. Он систематизировал курс математического анализа, ввёл понятие непрерывной функции на языке «ε – δ»; многое сделал в теории действительного числа. Благодаря ему математический анализ приобрёл строго обоснованную форму. Он стремился упорядочить новые открытия, совершённые в семидесятые годы Шарлем Мере [8], Эдвардом Гейне [9], Рихардом Дедекиндом и Георгом Кантором [10], стремясь изложить их классическим языком и согласовав с традиционным представлением о числе как об отношении величин.

Именно для этого в летнем семестре 1886 года он читает специальный дополнительный курс, посвящённый базовым понятиям математического анализа. Лекции проходили три раза в неделю в мае-июне. Конспект этих лекций, сделанный его студентами, был издан относительно недавно, в 1989 году [11]:

Вейерштрасс начинает курс словами: «Эти лекции составлены таким образом, чтобы дополнить лекции по теории аналитических функций зимнего семестра 1884/85. Та цель, которая имелась в виду, была достигнута, но более синтетическим методом, и некоторые результаты не получили желаемого обобщения, качество доказательств не было в полной мере удовлетворительным. Таким образом, представляется полезным после этих лекций рассказать о различных методах, лежащих в основании теории функций, проследить их исторически и критически, чтобы продемонстрировать различные точки зрения и попытаться их примирить. Короче говоря, показать тенденцию исторического развития математической науки, особенно в области анализа, и таким образом объяснить основные понятия науки. Нашей целью будет показать, что принципы математической науки основаны на действительно прочном фундаменте» [11, с. 20].

Для обоснования представимости функции Вейерштрасс использовал понятие действительного числа, включавшее его собственное учение о числе как об агрегате (обозримой совокупности), то есть конечной или бесконечной десятичной (или иной) записи, которая в бесконечном случае есть абсолютно сходящийся ряд, отвечающий отношению равенства (эквивалентности для бесконечных представлений) и порядка.

Как и Дедекинд, Вейерштрасс разделяет физическую реальность и «мир наших мыслей», в котором формируется идея числа для описания чисел и функций, следовательно, можно расширить множество чисел с помощью предельного перехода. Отсюда следует, что любые длины могут быть представлены числами, но не всякому числу соответствует длина.

Для него конечны все величины, выраженные через пропорции (отношения), бесконечная числовая величина называется определённой, если задан каждый элемент составляющего её сходящегося ряда[99]. Каждому из слагаемых вполне упорядоченного ряда соответствует определённая точка, но только в случае абсолютной сходимости ряда[100]. Условием этого является равномерная сходимость. Тогда при любой перестановке членов ряда пределом будет являться одна и та же числовая величина, расширяющая понятие числа.

Вейерштрасс вводит понятие переменной величины, связывая с ним понятие предельной точки[101], и следуя Кантору, определяет иррациональное число как предельную точку рациональных чисел. Он приводит пример: «число e, состоящее из элементов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$, это хорошо определённый ряд, который определяет конкретную числовую величину, тем не менее можно показать, что не существует рациональной числовой величины, которая равна ей по определению, что показывает, что числовая область рациональных чисел не полна[102]» [11, с. 58]. Вейерштрасс решает эту проблему в аспекте аналитического продолжения функции.

Вейерштрасс обращается к теореме Больцано о точной верхней границе переменной величины[103], но подвергает сомнению, всякая ли числовая величина соответствует точке[104]. Для него вся совокупность

---

[99] О сходимости ряда как о критерии существования числа говорил и Кантор в 1883 году

[100] Здесь Вейерштрасс критикует определение иррационального числа, данное Коши в 1821 году, как предела последовательности рациональных чисел.

[101] Понятие предельной точки, введённое Кантором в 1872 году, сразу же стало популярным у математиков, например, Г. Шварц написал о нём Улиссу Дини, который использовал его в своём курсе анализа [12].

[102] Иррациональность числа e была доказана в конце XVIII века (1776 год) И. Ламбертом, а его трансцендентность в 1873 году Ш. Эрмитом.

[103] В 1817 году Больцано формулировал эту теорему так: «Если свойство M не принадлежит всем значениям переменной величины x, однако, если оно принадлежит всем тем, которые меньше, чем известное u, то всегда существует величина U, являющаяся наибольшей из тех, о которых можно утверждать, что все x, меньшие, чем она, обладают свойством M» [13, с. 192].

[104] Кантор постулировал это как аксиому.

положительных числовых величин шире, нежели вся совокупность всех возможных отрезков от A в направлении AB. Если числовая величина определена, то есть выражена абсолютно сходящимся рядом, ей несомненно соответствует геометрический отрезок. Например, в десятичной системе ряд $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots$, $0 \leq a_k < 10$, $k \geq 1$, может представлять на отрезке любую числовую величину, которая возникает в вышеприведённом выражении ряда как первая, вторая [частичная сумма] и так далее. Вычисляя частичные суммы, Вейерштрасс определяет таким образом бесконечно много числовых величин, в окрестности которых сгущено бесконечно много определённых точек, и без определённых точек можно образовать непрерывную последовательность. Таким образом, можно определить положение точки D, разделяющей отрезок на два непрерывных отрезка «так, чтобы оно как-то согласовывалось с нашим врождённым, естественным понятием предела, после чего мы можем представить себе, что прямая не ограничена ничем, кроме точек, так что можно предположить, что D представляет собой определённую величину».

Вейерштрасс создаёт концепцию числовой прямой с помощью абсолютно и равномерно сходящихся рядов, но ему необходимо обратиться к понятию сечения: «Должна быть одна и только одна точка отделения двух отрезков друг от друга, и этой точкой является рассматриваемая числовая величина». Он определяет сечение на отрезке как точную верхнюю границу частичных сумм сходящегося ряда. Но в отличие от Дедекинда Вейерштрассу для обоснования теории аналитических функций нужно понятие непрерывности n-мерного точечного многообразия, следовательно, он должен определить в нём окрестность и границу. Окрестность точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которой находится бесконечно много определённых точек, Вейерштрасс определяет как n-мерный куб, $a_i - d < x_i < a_i + d$, $i = 1, \ldots, n$ при произвольно малом d. При этом можно сформировать все возможные числовые комбинации n величин окрестности точки. Тогда по крайней мере в окрестности хотя бы одной точки вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует бесконечно много определённых точек. Следовательно, окрестность точки $(a_1, \ldots, a_n)$ n-кратного многообразия действительных переменных можно определить как $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \leq d$, а окрестность точки $x_k = \xi_k + \eta_k i$, $k = 1, 2, \ldots, n$ n-кратного комплексного многообразия величин как $\sqrt{\sum_1^n (\xi_k - a_k)^2 + \sum_1^n (\eta_k - b_k)^2} \leq d$.

Отсюда следует возможность классифицировать все точки как определённые, если в каждой их окрестности бесконечно много определённых точек; в ином случае как граничные, или предельные (Grenzstelle).

Далее Вейерштрасс рассуждает по поводу определения континуума, связности и деления плоской области. Пусть для функции двух переменных областью определения является часть плоскости с некоторыми исключёнными точками. Тогда переход от одной неисключённой точки к другой возможен непрерывным связным путём. Можно выделить часть плоскости, содержащей этот путь. Вейерштрасс делает это с помощью цепочки областей, с помощью последовательности кругов, таких, что центр следующего круга лежит внутри предыдущего круга, а радиусы выбраны так, что все исключённые точки останутся снаружи.

Для случая, когда количество исключённых точек бесконечно велико, Вейерштрасс применяет другой приём и рассматривает пример: «исключённые точки лежат на окружности таким образом, что произвольная начальная точка в каком-либо направлении проецируется на дугу в u'; этот круг имеет единичный радиус, для $u' = 2\xi\pi$, где ξ пробегает все рациональные значения от 0 до 1, несмотря на то, что множество устранимых точек не является непрерывной линией [тем самым устраняется определённая часть плоскости без точек, непрерывно расположенных на линии]. Внутри круга не содержится исключённых точек. Возьмём какую-нибудь точку в качестве центра круга, все точки которого должны быть определены; можно убедиться, что его радиус не превышает определённого предела; вновь возьмём в круге новую точку и очертим вокруг неё круг, так же, как вокруг первой точки. Можно сделать вывод, что если неограниченно продолжать эту процедуру, мы никогда не выйдем из внутренней области через исключённые точки, ограничивающие круг, за пределы круга, подобно тому, как аналогично рассуждая, точка извне никогда не сможет попасть в круг. Таким образом, мы видим, что непрерывной последовательности точек недостаточно для разложения двумерного многообразия на части. Как мы видим из примера, даже априорно невозможно определить виды разложения плоскости на части»[105].

---

[105] Ещё в 1885 году Л. Е. Фрагмен доказал, что разложение плоскости возможно только с помощью континуума, а последовательности точек, то есть счётного множества, для этого недостаточно. – *Благодарю профессора Е. Медушевского за это замечание.*

Как любезно прокомментировал это место у Вейерштрасса профессор Е. Медушевский, «предыстория связности у Вейерштрасса весьма интересна. Это понятие для современных топологов есть чистое свойство фигур и пространств, а для Вейерштрасса его исследование мотивируется стоящими перед ним задачами. Множества, рассматриваемые Вейерштрассом, – это множества точек, исключённых из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. В данном примере множество точек $u' = 2\xi\pi$ единичной окружности с рациональным ξ означает множество исключённых точек. Оно счётно, но достаточно для того, чтобы препятствовать аналитическому продолжению из внутренней части круга во внешнюю, так как аналитическое продолжение производится с помощью конечной цепочки открытых дисков, каждый из которых имеет общую точку с предыдущим. Это очень сильное условие связности, значительно более сильное, чем условие Кантора, где мы требуем только соединения для любого ε, конечной последовательности точек, каждая из которых удалена на расстояние ε от следующей. Посредством таких последовательностей мы можем проникнуть из внутренней области круга во внешнюю. Чтобы предотвратить такое свободное проникновение из области определения в дополнение множества исключённых точек, требуется множество, содержащее нетривиальные континуумы. Это как раз случай, описанный Фрагменом. Неизвестно, рассматривал ли кто-нибудь понятие связности в приложении к теории функций. Пожалуй, только Миттаг-Леффлёр был способен рассматривать связность как автономный инструмент в математическом исследовании функций[106]».

Вейерштрасс определяет замкнутое множество как множество точек, любая окрестность которых содержит бесконечно много определённых точек. Таким образом, для внутренней части круга вместе с окружностью каждая точка окружности определена и одновременно является граничной. Любое точечное множество P можно сделать замкнутым, добавив к нему его предельные точки. Вокруг точек, не принадлежащих ни к множеству, ни к его границе, можно описать круг конечного радиуса. Абсолютный радиус окрестности такой точки – это верхний предел радиусов всех её окрестностей. Его нижний предел не равен нулю. С помощью такого замкнутого множества P из n-кратного многообразия Вейерштрасс выделяет один или несколько континуумов.

---

[106] Личное сообщение от 07.05.2013.

С помощью построения ломаной линии, соединяющей две точки континуума, Вейерштрасс показывает, что если все звенья ломаной со своими окрестностями лежат в этом континууме, то он связен. Но во всякой точке ломаной линии радиус имеет конечное значение, иначе точка будет граничной. Следовательно, точки ломаной принадлежат точечному множеству P, таким образом, это множество может быть использовано для продолжения континуума.

Но теперь во всякой точке ломаной линии ρ имеет конечное значение, потому что иначе упомянутое место (точка) является предельной точкой для A, то есть принадлежит точечному множеству P, так что можно использовать его как любое продолжение континуума. Из всякой точки континуума можно попасть в те токи, которые принадлежат этому континууму.

Доказав это положение для плоскости, Вейерштрасс обобщает его на случай n-кратных многообразий. Он определяет линию как совокупность точек[107] $x_k = a_k + t(b_k - a_k)$, $(k = 1, ..., n)$, где t – неограниченная действительная переменная. Если t принимает значения от 0 до 1, получаем отрезок ab. При $t > 1$ получаем продолжение отрезка за пределы b, при $t < 0$– продолжение отрезка за пределы a. Расстояние точки b до точки a равно $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2}$. Если оно равно r, тогда окрестность точки a радиуса r – это все значения $\sqrt{\sum_1^n (b_k - a_k)^2} < r$.

Используя неравенство треугольника $ax < ab + bx$, Вейерштрасс доказывает, что, если точки n-мерного многообразия a, b, x не лежат на одной прямой, то $\sqrt{\sum (x_\lambda - a_\lambda)^2} < \sqrt{\sum (b_\lambda - a_\lambda)^2} + \sqrt{\sum (x_\lambda - b_\lambda)^2}$. Он доказывает это вариационным методом, а именно, показывает, что выражение $\sqrt{\sum (x_\lambda - a_\lambda)^2} = R$ имеет в некоторой одной точке минимум, и в другой точке максимум, составив выражение $\sum (x_\lambda - a_\lambda)^2 - \varepsilon \sum (x_\lambda - b_\lambda)^2$. Доказанную теорему он использует в дальнейшем. На её основе Вейерштрасс вводит следующее определение:

если в окрестности точки a содержится точка b, в окрестности точки b содержится точка c и так далее, то любая точка s, по которой мы можем перейти из a в c, называется связной (смежной) с точкой a.

---

[107] Gesamtheit der Stellen, геометрическое место точек.

Он показывает, что если s связано с a, то и a связано с s. Это означает, что исходя из любой точки континуума, мы всегда в нём и останемся.

Далее Вейерштрасс создаёт понятие границы континуума, то есть таких точек, в окрестности которых находятся как точки, принадлежащие континууму, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность таких точек Веерштрасс называет границами континуума. Например, на плоскости границей может быть одна точка, бесконечно много точек, расположенных дискретно; и непрерывный контур. Вейерштрасс доказывает, что помимо этого приведённого примера в континууме имеются границы, и что все они содержатся в замкнутом точечном множестве, с помощью которого определялся континуум.

Если добавить к незамкнутому континууму все предельные точки, то получим структуру, которую вправе называть замкнутым континуумом.

Все рассуждения Вейерштрасса направлены на создание аппарата обоснования теории аналитических функций, аналитического продолжения. Они ориентированы только на эти цели, и в то же время содержат начала новых идей функциональных пространств.

Дальнейшее развитие идей К. Вейерштрасса

Как мы видим, в этих лекциях Вейерштрасса уже заложены понятия измеримого множества, метрического и топологического пространства. Теорема о том, что каждое ограниченное бесконечное подмножество в R^n имеет предельную точку (которая понималась им иначе, нежели Кантором), рассматривалась Вейерштрассом для $n = 2$ в курсе лекций 1865 года, общее доказательство было дано им в 1874 году. Но Вейерштрасс не выделял понятие предельной точки как базовое, это сделал Кантор в 1872 году, построив иерархию производных множеств. Лекции Вейерштрасса не публиковались, но идеи его расходились благодаря слушателям, студентам Германии, Италии и России. В Италии его идеи продолжили Дж. Асколи (1843–1896), Ч. Арцела (1847–1912), У. Дини (1845–1918).

Идеи К. Вейерштрасса в Италии

Курсы математического анализа в Италии приводились в соответствие с достижениями немецких и французских математиков. С этой целью

Ф. Бриоши, Э. Бетти, Ф. Казорати неоднократно ездили в Германию для встреч с Вейерштрассом, Куммером, Кронекером и другими математиками [15, с. 221]. Благодаря интенсивной переписке между Г. Шварцем, Ф. Казорати и У. Дини итальянские математики были в курсе всех математических новостей Германии. Лучшим в Италии считался курс Улисса Дини «Основания теории функций действительной переменной» [12, 16], который он читал в университете Пизы с 1871 по 1915 год. Новые результаты Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда были включены в этот курс [14]. В 1877–78 годах у Вейерштрасса обучался С. Пинкерле (1853–1936), и в 1880 году он начал читать в университете Павии курс «Теория аналитических функций по Вейерштрассу» (Teorica delle funzioni analitiche secondo Weierstrass), а позже издал его [17]. Так идеи Вейерштрасса распространялись в Италии.

В 1883 году В. Вольтерра начал создавать теорию функционалов, или «функции линий с действительными значениями». Эти функции рассматриваются как элементы множества, для которого могут быть определены понятия окрестности и предела последовательности. Вольтерра дал определения непрерывности и производной функции линии и попытался построить теорию функций линий аналогично римановой теории комплексных функций.

Рис. 5. Вито Вольтерра

В 1884 году Джулио Асколи (1843–1896) распространил теорему Больцано–Вейерштрасса на множества функций. В 1889 году Ч. Арцела обобщил эту теорему и доказал, что равностепенно непрерывное множество F равномерно ограниченных функций на $[a, b]$ имеет предельную функцию.

Рис. 6. Джулио Асколи

Потом Чезаре Арцела рассмотрел непрерывные действительнозначные функционалы, определённые на равностепенно непрерывном множестве функций F и показал, что если F замкнуто, то есть содержит все свои предельные функции, нижнюю границу множества величин функционалов, то достигается верхняя граница и все промежуточные значения.

Рис. 7. Чезаре Арцела

Теперь фундаментальная теорема Асколи – Арцела в анализе формулируется в терминах компактности, на языке, созданном Фреше в 1904 году.

М. Фреше, Ф. Рисс и Ф. Хаусдорф

В 1906 году Морис Фреше (1878–1973) в диссертации «О некоторых вопросах функционального исчисления» [18] ввёл понятие метрического пространства [18, с. 30], формализованное в 1914 году Хаусдорфом, с аксиомами тождества, симметрии и треугольника.

Рис. 8. Морис Фреше

Ф. Рисс (1880–1956) в 1908 году в докладе «Непрерывность и абстрактная теория множеств» [19] на IV Международном математическом конгрессе в Риме характеризовал континуум с помощью понятия предельной точки, удовлетворяющей трём основным аксиомам: каждый элемент, являющийся предельной точкой, подмножества *M*, является также предельной точкой всякого множества, содержащего *M*; если подмножество разделить на два подмножества, то каждая предельная точка является предельной точкой по крайней мере одного из них; подмножество, состоящее только из одного элемента, не имеет предельной точки. Для усиления Рисс добавил четвёртую аксиому: каждая предельная точка множества единственным образом определяется через совокупность всех его подмножеств, где она является предельной точкой.

Рис. 9. Фридьеш Рисс

Феликс Хаусдорф (1868–1942) окончил университет в Лейпциге в 1891 году, слушал лекции в университетах Фрайбурга и Берлина. Возможно, он был знаком с лекциями Вейерштрасса, прочитанными в 1886 году. Ещё в 1912 году Хаусдорф, читая лекции по теории множеств в университете Бонна, ввёл понятие окрестности U_x точки x как множества всех точек y, для которых $x \cdot y < \rho$, где ρ – положительное число, внутренность сферы радиуса ρ, $x \cdot y = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \geq 0$ – расстояние между точками x и y. Окрестность у него обладает следующими свойствами: Каждая U_x содержит x и содержится в r (где r – это любое n-мерное пространство, например, плоскость). Для двух окрестностей одной и той же точки $U'_x \supseteq U_x$ или $U'_x \supseteq U'_x$. Если y лежит в U_x, то существует окрестность U_y, которая содержится в U_x ($U_x \supseteq U_y$). Если

$x \neq y$, то существуют две окрестности U_x, U_y без общих точек [20]. В 1914 году Хаусдорф написал одно из первых систематических изложений теории множеств[108] и теории топологических пространств «Основания теории множеств» [21], где ввёл понятие топологического пространства. В этой книге Хаусдорф пользуется понятием верхней границы, введённым Вейерштрассом.

Рис. 10. Феликс Хаусдорф

Заключение

Понятие связности используется преимущественно в топологии [22]. Вейерштрасс, развивая созданный им метод аналитического продолжения, построил собственное, более сильное, чем у Кантора, понятие связности для нужд теории аналитических функций. Намерение Вейерштрасса обосновать и систематизировать современный ему математический анализ привело к созданию им новых направлений и понятий в анализе и топологии. Как говорил Вейерштрасс, «даже введение в математические науки требует изучения различных проблем, что

---

[108] Первым был Шёнфлис.

в первую очередь показывает нам значительность и состоятельность науки. Нужно иметь в виду, что конечной целью изучения оснований науки является стремление получить уверенность в справедливости исследования» [11, с. 20]. Вейерштрасс настолько глубоко проанализировал методы и понятия классического анализа, что его построения привели к понятию метрического и топологического пространства, на основе которых зародился функциональный анализ.

Нам известна ранняя история связности как путь идей Б. Больцано (1817) – Г. Кантор (1879–1883) – К. Жордан (1893) – Н. Леннес (1905–1911) – А. Шёнфлис (1904) – Ф. Рисс (1906) – У. Г. и Г. Юнг (1906) – Ф. Хаусдорф (1914) [23]. Теперь имя Вейерштрасса займёт достойное место в истории развития понятия связности.

Автор благодарит профессора Е. Медушевского (Mioduszewski) за ценные замечания, высказанные при обсуждении этой главы.

Литература к XI главе

1. *Эйлер Л.* Письма к ученым / Л. Эйлер // М. –Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – С. 336–340.

2. *Листинг И.* Предварительные исследования по топологии / И. Листинг // М., 1932. – 119 с.

3. *Listing J.B.* Der Census raumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler‘schen Satzes von den Polyeder / J. B. Listing. – 1862.

4. *Риман Б.* Сочинения / Б. Риман // М. –Л., 1948. – С. 52.

5. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / Г. Кантор // М., 1985. – С. 40–139.

6. *Ketsier T.* By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics / T. Ketsier, J. van Mill // 43 p.

7. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн // Т. I. М.–Л.: ГОНТИ., 1937. – 432 с. – С. 327.

8. *Синкевич Г. И.* Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере / Г. И. Синкевич // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Изд. ЯГПУ. – 2012. – С. 180–185.

9. *Гейне Э. Г.* Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г. И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. Под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. Б. Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб., 2012. Вып. 18. – С. 26–46.

10. *Синкевич Г. И.* Георг Кантор & Польская школа теории множеств / Г. И. Синкевич // Изд-во СПбГАСУ. СПб., 2012. – 356 с.

11. *Weierstrass K*. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86 / K. Weierstrass // Teubner–Archiv für mathematic. Band 9. – 272 s. Reprint, 1989.

12. *Dini U*. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali / U. Dini // Pisa: tip. Nistri, 1878. – VIII+407 P.].

13. *Кольман Э*. Бернард Больцано / Э. Кольман // М., 1955. – С. 192.

14. *Синкевич Г. И*. Улисс Дини и понятие непрерывности / Г. И. Синкевич // История науки и техники. – 2012. – №10. – С. 3–11.

15. *Borgato M. T*. Continuity and discontinuity in Italian mathematics after unification: from Brioschi to Peano / M.T. Borgato // Organon. – 41. – 2009. – P. 219–232. – P. 221.

16. *Dini U*. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen relleen Grösse. Mit. / U. Dini // Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, Un voi. in-8°. Leipzig. – 1892. – p. XVIII+554.

17. Pincherle S. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C Weierstrass / S. Pincherle // Napoli. – 1880. – 124 p.

18. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel / M. Fréchet // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906. – 22. – P. 1–74. – p. 30.

19. Riesz F. Stetigkeit und Abstrakte Mengenlehre / F. Riesz // Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici, vol. 2. Rome, 1908. – P. 18–24.

20. Хаусдорф Ф. рукопись 1912 г., Архив университета Бонна // Ketsier, van Mill. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. – 43 P.

21. *Hausdorff F*. Grundzüge der Mengenlehre / F. Hausdorff // Leipzig: von Veit. – 1914. На русском языке: Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л., 1937 – 304 с.

22. *Mioduszewski E*. Connectedness // Encyclopedia of General Topology / Amsterdam: Elsevier, 2003. – P. 223–226.

23. *Wilder R.L.* Evolution of the topological concept of “connected” / R. L. Wilder // Amer. Math. Monthly. – 1978. – 85. – P. 720 – 726.

Глава XII. УЛИСС ДИНИ И ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Рис. 1. Улисс Дини

Итальянский математик Улисс Дини работал в период расцвета математического анализа, годы его жизни (1845–1918) совпадают с годами жизни Георга Кантора, который высоко его ценил. Основные результаты Дини относятся к дифференциальной геометрии, основам анализа и рядам Фурье. Курс математического анализа, который Дини читал почти 50 лет, был основан на исследованиях П. Дирихле, Н. Абеля, П. Дюбуа-Реймона, К. Вейерштрасса и Г. Миттаг-Леффлера, и с годами обогащался результатами Г. Кантора, Э. Гейне, Р. Дедекинда, Г. Ганкеля и Г. Шварца. Во многих случаях Дини вводил более общие формулы и методы. Так, например, в области непрерывности и равномерной непрерывности функций он показал получение результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера с помощью метода Э. Бетти, и подобным же образом обогатил новыми методами теорию степенных и тригонометрических рядов и теорию функций комплексной переменной. Дини принадлежит определение непрерывности функции через односторонние пределы, а также собственная классификация разрывов. В этой главе мы рассмотрим его вклад в развитие понятия непрерывности.

Улисс Дини родился 14 ноября 1845 года в Пизе в небогатой семье Пьетро и Терезы (урожд. Marchionneschi).

В Нормальной школе[109] университета Пизы он учился у Э. Бетти[110] (1823–1892) и О. Моссотти[111] (1791–1863). В 19-летнем возрасте представил работу (диссертацию) по приложениям теории поверхностей. Выиграв конкурс на обучение за границей, 1864–65 г. он провёл в Париже, работая под руководством Ж. Бертрана и Ш. Эрмита, и за это время опубликовал семь работ по теории поверхностей. С 1866 года и до конца жизни работал профессором (с 1867 года – ординарным профессором) Пизанского университета (в 1888–1890 г. – ректор). Сначала он занимался высшей алгеброй и теоретической геодезией, в 1871 году был назначен профессором анализа и высшей геометрии на место своего учителя Энрико Бетти, которому была передана кафедра математической физики. С 1877 года помимо этого читал лекции по инфинитезимальному анализу. Этот курс Улисс Дини читал до самой смерти 28 октября 1918 года.

В течение 10 лет Дини был членом правительства города Пизы, и в течение 25 лет был членом Верховного света Пизы, с 1880 года он – член Национального Парламента как депутат от Пизы. В 1892 году был назначен государственным сенатором. Его политическая деятельность была направлена в сферу образования, в частности, благодаря ему были созданы Прикладная инженерная школа, Женская нормальная школа, Технический институт. С 1908 по 1918 г. он – директор педагогического колледжа.

---

[109] Высшая Нормальная школа Пизы, основанная в 1810 г. Наполеоном по образцу Нормальной школы в Париже, входит в состав университета Пизы. Сам университет ведёт свою историю с XI века; среди его студентов, а потом профессоров в XVI веке был Галилео Галилей. Здание XVI века построил Джорджо Вазари. В 1864 году там читал лекции Б. Риман.

[110] Энрико Бетти был не только ярким учёным, но и участником борьбы за объединение Италии, соратником Гарибальди. Его научные интересы были близки интересам Римана, с которым он состоял в тесной переписке, а в годы пребывания Римана в Италии – в тесной дружбе. В молодости Бетти занимался алгеброй, затем многозначными аналитическими функциями, комбинаторной топологией, ввёл понятия, которые Пуанкаре позже назвал «числами Бетти» и «группами Бетти». Также занимался теорией упругости и уравнениями матфизики [4, с. 9].

[111] По кафедре математической физики.

Современники вспоминают о Дини как о прямом, честном и добром человеке, который посвятил свою жизнь не только преподаванию и фундаментальным исследованиям, но и общественной деятельности, направленной на благосостояние родного города и страны.

Рис. 2. Памятник Улиссу Дини в Пизе

Первый период научной деятельности Дини связан с дифференциальной геометрией. Он занимался изучением свойств некоторых поверхностей в русле проблематики Ж.-Б. Мёнье и Ж. Лиувилля во Франции и Э. Бельтрами в Италии.

Методы высшей геодезии, которыми виртуозно владел Дини, позволили ему более простым способом заново вывести некоторые приближённые формулы Даламбера и формулы расчётов географических координат и длины дуги меридиана, сделанных ранее французскими инженерами.

В алгебре Дини сформулировал теорему о верхней и нижней границе для модулей корней алгебраических уравнений.

Ещё одна область исследований, вклад в которую внёс Дини, – это дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных, к которым Дини обращался в течение полувека.

Известна теорема Дини о равномерной сходимости рядов и признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье [15]. Его идеи относительно непрерывности рядов и непрерывных функций развивали Ч. Арцела и М. Краузе.

Дини, будучи студентом-геометром, заявил о себе как о серьёзном аналитике, опубликовав восемь работ. Первые десять лет творческой работы он предпочитал заниматься теорией поверхностей. По мере знакомства с аналитическими методами школы Вейерштрасса, он заинтересовался рядами Фурье, а затем инфинитезимальным анализом. Уже в работах [10, 11, 12], наряду с использованием методов классического анализа видны попытки нового подхода и ощущение потребности в новых методах. Он чувствовал неудовлетворительность методов доказательств, недостаточность базовых принципов, лежащих в основе анализа, и, прежде всего, теории функций действительной переменной. Но эти же годы обогатили математический анализ работами математиков школы Вейерштрасса. В 1872 году появились статьи Кантора [2, с. 9–17], Гейне [23] и Дедекинда [1], посвящённые расширению понятия числа и непрерывности. 1875–1885 – это годы создания Кантором теории множеств.

Дини, работая самостоятельно, постепенно приходил к новой концепции непрерывности и к теоремам об ограничениях в теории рядов и дифференцировании, благодаря чему его курс теории функций действительной переменной приобрёл законченный вид, включающий все основные разделы, и имеющий оригинальное изложение. В 1870-х годах Дини благодаря переписке с Г. Шварцем, познакомился с работами Э. Гейне, Г. Шварца, Г. Кантора, П. Дюбуа-Реймона и Г. Ганкеля, включив их результаты в свой курс «Основы теории функций действительного переменного».

На лекциях Дини увлекал студентов не только строгим изложением материала, но и оживлёнными дискуссиями по поводу проблемных вопросов.

Учеником Дини был Вито Вольтерра, который обратился к математическому анализу после лекций Дини. 18-летний Вольтерра писал своей матери: «Мой дядя спрашивает, нравятся ли мне лекции Финци[112]. Без сомнения, они прекрасны; он такой лектор, который представляет вещи упорядоченно и ясно, он никогда не смущается, он *безупречно* чёток, правильно говорит, он хорош и добр; лучшего преподавателя алгебры

---

[112] Чезаре Финци был преподавателем алгебры в университете Пизы и другом семьи Вольтерра.

невозможно и пожелать. Но я всё же предпочитаю Дини, который читает лекции чуть сбивчиво, который временами объясняет, не делая никаких заключений, а временами бывает немного невразумителен. Я предпочитаю его, потому что он вкладывает всю душу в лекции, потому что вещи, которые он объясняет, это почти всегда его собственные открытия – по крайней мере, метод действительно его собственный. Он говорит просто и немного смущённо, но в конце его идеи бесконечно более ясны, более лаконичны, и, что важнее всего, более точны, чем у Финци. Лекции Дини всегда интересны» [22, с. 39].

«Основания теории функции действительного переменного» 1878 года [14] – это фундаментальная работа, создание которой началось в 1871/1872 годах, дополнялось по мере получения новых результатов самого Дини и его коллег. В 1875 году были готовы первые девять глав, остальные – в январе 1877 года. В том же 1877 году вышла статья «О функциях, нигде на интервале не имеющих производной» [13], посвящённая специальным вопросам анализа. В ней обобщаются результаты Дюбуа-Реймона и Ганкеля, посвящённые функциям с бесконечной сингулярностью. Дополненное издание «Оснований теории функций действительной переменной» [16] на немецком языке вышло в 1892 году, что расширило влияние методов Дини. Последнее расширенное издание выходило в 1907–1915 годах под названием «Лекции по инфинитезимальному анализу» [17]. Этот трактат в итальянской литературе считается наиболее полным курсом математического анализа в итальянской литературе [24].

Георг Кантор высоко ценил этот курс Дини. 28 декабря 1878 года в письме к Дедекинду он писал: «Вы должны несомненно располагать книгой «Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali» (Pisa, 1878) Улисса Дини. Этот труд, как мне кажется, выполнен человеком, знающим свой предмет и весьма искусным. При введении чисел он пользуется Вашим методом» [2, с. 350].

Методологическая база Дини, обусловленная опытом дифференциальной геометрии, в анализе бесконечно малых очень сильна и отличает его курс от курсов других аналитиков. При анализе поведения функции в области он работает с окрестностью точки с хирургической тщательностью. Дини рассматривает много примеров функций, подтверждающих или показывающих границы применения утверждений, приводит контрпримеры. Дини – мастер тонкого рассуждения и детального изложения.

В основу курса положены лекции, прочитанные им в университете Пизы в 1871/72 годах. Этот курс создавался, когда уже был разработан анализ Вейерштрасса; дополнялся определением действительного числа, данным в 1872 году Кантором, Гейне и Дедекиндом, и первыми работами Кантора по теории множеств. Дини во многом продвинулся в разработке понятия непрерывности с помощью геометрических представлений и методов дифференциальной геометрии. Его индивидуальный подход отличается от главного направления разработки понятия непрерывности европейских, и прежде всего немецких математиков, что было обусловлено в 1870-е годы скудным и запоздалым снабжением литературой и невозможностью поездки в Германию, о чём пишет Джино Лория [24].

Дини принадлежит новое определение непрерывности функции в точке с помощью левого и правого предела. Все эти теоремы он сохранил в издании 1907–1915 годов [17]. Непрерывность числовой прямой и понятие числа Дини излагает по Дедекинду, но придаёт большее значение пределам слева и справа. Определение функции даётся по Дирихле. Разрывы функций Дини сначала классифицирует по Риману (разрыв устранимый или нет), затем вводит новую классификацию (конечный или нет, односторонний или нет). Используемые Дини обозначения $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$ принадлежат Дирихле. Теорему Кантора о равномерной непрерывности Дини излагает на основании сообщения Шварца. Доказательство большинства теорем проводится с использованием леммы Гейне. Первичные понятия точечных множеств, предельной точки, верхней и нижней границы и производного множества он излагает по Кантору.

В 1879 г. Кантор писал: «В недавно появившемся труде Дини мы находим понятие производного множества, развитым ещё далее тем, что он взял его за исходный пункт ряда замечательных обобщений известных аналитических предложений» [2, с. 40].

В 1877 году Дини приостановил публикацию «Основ теории функций действительного переменного», чтобы дополнить её новыми результатами П. Дюбуа-Реймона, К. И. Томе[113] и Ж. Дарбу, и добавить свои новые результаты.

---

[113] Thomae K. J., 1840–1921.

В первой главе изложена теория иррациональных чисел Дедекинда, дополненная Шварцем, во второй главе – теория числовых или точечных множеств Кантора[114].

В третьей главе вводится понятие предела, верхнего и нижнего предела[115]. В качестве примера Дини приводит ряд

$$\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots,$$

впервые появившийся в 1748 году у Эйлера во «Введении в анализ бесконечных» [5, т. I, с. 266], затем в 1822 году в «Аналитической теории тепла» Фурье [20, с. 227], и наконец, упомянутый Абелем в 1826 году в работе [6] в качестве контрпримера к ошибочному утверждению Коши 1821 года [8, с. 120] о сходимости ряда непрерывных функций к непрерывной функции, исправленному Коши в 1853 году [9]. Этот ряд, при $x = \pi$ равный нулю, а справа и слева от этой точки равный соответственно $-1/2\pi$ и $1/2\pi$, является для него наглядной демонстрацией важности введения односторонних пределов. Дини пишет: «Отметим, однако, что нигде раньше у других авторов нет никакого упоминания о пределе y для $x = a$ (справа и слева), когда значение y_a не определено и/или когда они известны, но отличаются в пределе, или когда, наконец, не хотят рассматривать совокупность других значений y слева и справа от a, потому что этот процесс в $x = a$ больше не имеет смысла, и потому то же значение y_a должно на самом деле определять другой процесс. И вообще, когда мы говорим о пределе, идея в том, что это недостижимая величина» [14, с. 26]. Сохраняя все прежние методы анализа, Дини обозначает новые проблемы анализа с помощью односторонних пределов.

В четвёртой главе рассматривается общее понятие функции одной переменной в интервале, в пятой главе даны общие свойства конечных и непрерывных функций с использованием теоремы Кантора о равномерной непрерывности, известной Дини по сообщению Шварца. В шестой главе рассмотрены линейно разрывные функции Ганкеля. Седьмая и восьмая главы посвящены рядам и производным.

---

[114] К этому времени ещё не появилось «Учение о многообразиях» Кантора, первая часть которого вышла в 1878 году. Дини знал статьи Кантора в 1872 и 1874 годах, в которых было изложено понятие действительного числа (числовой величины – использовался этот термин), первые понятия числовых множеств, в том числе понятие предельной точки и производного множества.

[115] Эти понятия были введены П. Дюбуа-Реймоном.

В девятой главе изложен принцип сгущения особенностей Ганкеля, в десятой определяется общий класс аналитически простых функций, нигде не имеющих конечную производную. Дини использует пример Дюбуа-Реймона 1875 года из статьи «Попытка классифицировать произвольные функции действительного аргумента по их изменению на наименьшем интервале» [19][116].

В десятой главе приведены общие рассуждения о конечных и непрерывных функциях и их производных, дополненных новыми результатами, появившимися после публикации седьмой главы. Дини отмечает [14, с. VII–VIII], что большинство исследований по функциям носят настолько общий характер, что они не зависят от возможного аналитического вида самих функций, конкретизация возможна только с учётом их некоторых общих свойств. Изучают всегда конечную и непрерывную в промежутке функцию с учётом некоторого набора частных свойств, это позволяет сделать некоторые конкретные выводы, которые было бы трудно сделать в общем случае. В конце главы содержатся некоторые обобщения определённых интегралов. Дини обращает внимание на проблему, обозначившуюся в математическом анализе – различие аналитического и структурного описания и соответственно анализа свойств функции. Как отмечал позже Лузин, это привело к появлению дескриптивного и конструктивного направлений в математическом анализе [3, с. 50–51]. Исследования Дини легли в основу современного анализа.

Приложение к XII главе

Улисс Дини. «Основания теории функций действительного переменного» 1878 года [14].

Курсив У. Дини. Перевод Синкевич

***U. Dini. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878)**

Последние 12–13 лет ознаменовали для меня период сомнений в том, что никакие фундаментальные принципы анализа не представляются изложенными в полной строгости и обоснованности в собственно

---

[116] Заметим, что один из таких примеров был дан Дюбуа-Реймоном ранее в том же журнале Крелле-Борхардта в 1872 году [20].

математическом смысле. В то же время новая математическая жизнь, разнообразные исследования вносят надежду во всеобщие сомнения в разрешении этих принципиальных трудностей, которые пребывают лишь в моём воображении; когда некоторые мемуары Шварца и Гейне были опубликованы в период с 1870 по 1871, стало понятно, что эти люди уже опытны в науке и заслуживают глубокого уважения, сомнения свойственны и большим учёным; и круг немецкой науки выглядит установившимся на основе твёрдых принципов Алгебры и Анализа бесконечно малых.

Несмотря на то, что я начал свои мемуары с жалоб и некоторой неуверенности, это означает моё страстное намерение развеять сомнения, которые возможно обуревают только меня. Надеюсь, что эти сомнения позволят мне, профессору высшего Анализа Королевского университета Пизы, создать исследование более специального Анализа, подобное исследованию Шварца; обращаюсь к нему с публичным выражением благодарности и с просьбой сообщать новые результаты методов Вейерштрасса и других немецких математиков, их учеников и последователей в этом.

Опираясь на известия, полученные мною от Шварца, на два прекраснейших труда Ганкеля (Hankel) о пределах и о колеблющихся (oscillante) функциях, а также Дедекинда, Кантора и Гейне о неизмеримых числах, я решил взять в качестве источника одну часть моих университетских лекций 1871/72 учебного года, изложенных в научных принципах строгости, следуя направлению, содержащему некоторые замечания и указания, полученные от Шварца; а в следующем году решил опубликовать эти лекции, уже по большей части подготовленные для печати.

Закончив по этой причине лишь в 1873 году с колоссальным трудом редактирование в ином жанре, я должен признать, что это замедлило указанное издание, и только в июле 1875, несмотря на то, что было ещё множество других безотлагательных забот, издание было начато, потом прервалось на полдороге в 1876, после этого я подготовил 9 первых глав, чтобы дополнить их некоторыми лекциями этого года.

Вернувшись затем вновь к научной жизни в начале 1877 года, я приостановил публикацию, чтобы переписать некоторые фрагменты. Это было вызвано тем, что за это время появились новые труды, среди которых работы Дюбуа–Реймона, Томе, Дарбу, где изложены их различные методы и результаты, которые уже теперь опубликованы или приготовлены к публикации; таким образом, в моём авторстве утрачена немалая часть. Ибо я делал воистину собственный курс инфинитезимального анализа, но будучи внештатным преподавателем, я на каждом шагу сомневался; но указанные исследования расширили мои взгляды, я использовал эти новые исследования, добавив свои личные результаты; в своём опусе я бы хотел начать с вопросов, в нём заключённых, поэтому вы найдёте здесь и повторения, и разные аспекты одних и тех же вопросов.

Добавим сюда, что имея желание продолжить свои скромные изыскания, я допускаю, что издание книги даже с основным исследованием вполне своевременно для таких вопросов, как кратные интегралы, для функций двух или более переменных в целом, и для тех, которые удовлетворяют уравнению $\Delta^2 = 0$, свойство эвольвенты функции в тригонометрическом ряде, для рядов сферических функций и так далее; я заимствовал многое из книг, получив замечательные результаты, и вновь приступил к публикации на основании достигнутого, не мешкая, и поэтому я решил посвятить всё издание строгому и полному курсу инфинитезимального анализа, который, как я чувствую, в этом нуждается, и я хочу пока сосредоточить усилия на улучшении пользы, без чего наше издание лишено смысла. Эти открытия, однако, частично опубликованы в книгах многих моих друзей, и многих молодых людей, которые уже были моими студентами, это обязывает меня продолжить публикацию, используя новые полученные сведения и в то же время после того, как уменьшен раздел основ определенных интегралов. Так я и сделал, отложив возобновление оставшейся части этой работы на подходящее время, после того как будет опубликован полный курс исчисления бесконечно малых, первый проект которого уже был написан по моим лекциям этого года, а потому я прошу снисхождения к различным дефектам этого курса, предлагая его вниманию публики.

А теперь короткий обзор содержания книги.

В первой главе изложена теория неизмеримых чисел, главным образом по Дедекинду, в некоторой степени дополненная Шварцем, во второй главе – теория числовых или точечных множеств (Punkt-menge), введённая в науку Кантором. В третьей главе я предлагаю понятие предела и теорем, которые ему соответствуют; это изложение, мне кажется, оправдано, ибо этот способ сохраняет все методы и в то же время ярко освещает обозначенные научные проблемы; это недорогая плата за те результаты, которых мы ранее не могли бы иметь.

В четвёртой главе рассматривается общее понятие функции одной переменной в интервале, в пятой главе даны общие свойства конечных и непрерывных функций, для чего я использую теорему Кантора о равномерной непрерывности в § 41, доказательство которой сообщил мне Шварц. В шестой главе рассмотрены разрывные функции с бесконечным числом разрывов (линейно разрывные функции Ганкеля), а в двух следующих главах некоторые общие исследования о рядах, и, на мой взгляд, неполные сведения о производных.

В девятой главе изложен принцип сгущения особенностей, данный Ганкелем, как мне кажется, в довольно строгом изложении, в десятой главе я определяю общий класс аналитически достаточно простых функций, нигде не имеющих определённую конечную производную, один из частных случаев такой функции приведен Дюбуа-Реймоном в 79 томе журнала Борхардта. Последняя функция, которую я рассматриваю в этой главе (§ 129), от α и x, когда они рассматриваются как радиус-вектор и полярный угол точки на плоскости, есть важный пример функции двух переменных α и x, являющейся конечной и непрерывной на всей плоскости; показано, что в круге радиуса $1+\frac{3}{2}\pi$ имеются конечные и непрерывные частные производные по переменной α, но нет конечной частной производной по x . Тогда легко найти функции нескольких переменных, которые имеют аналогичную особенность.

В десятой главе я привожу некоторые общие рассуждения по конечным и непрерывным функциям в связи с существованием производных; эти рассуждения приведены с целью дополнить материал седьмой главы, где они приведены первоначально, уже будучи в печати. Хотя я не придаю большого значения этим результатам, потому что убеждён, что большинство исследований по функциям носят настолько общий характер, что они не зависят от возможного аналитического вида самих функций, которые возникают только с учётом их некоторых общих свойств, т. е. изучается всегда конечная и непрерывная в промежутке функция, с учётом некоторого набора частных сведений, и это бросание в крайности проливает много света и позволяет сделать такие выводы, которые вам было бы трудно сделать в общем случае.

В конце этой длинной главы я изложил определённые интегралы, пользуясь тем, что было получено в предыдущей главе, и я пришёл к такой общности результатов, которые не ожидал получить сначала, и вижу, что здесь много новых результатов и методов доказательств, надеюсь, что эту главу найдут интересной.

Из этих результатов можно получить многое и для кратных интегралов, и вообще расширить их на случай функции многих переменных, рассматриваемых в конечномерных или бесконечномерных областях, это относится также и к результатам из главы 4 и следующей за ней, посвящённых функции одной переменной.

Тем не менее, для широкой публики эти методы не представят большого труда, в названии главы я указал определённые интегралы, хотя должен признать, что они изложены неполно. Я буду рад, если, несмотря на замечания, мои недавние результаты будут полезны упрочению основы фундаментальных принципов анализа; эти наблюдения и результаты ранее были известны только в ограниченном кругу учёных.

Пиза, 10 июля 1878 года.

Неизмеримые числа

§ 1. Прежде чем приступить к изучению функции действительной переменной, полезно определить понятие иррационального или неизмеримого числа, а также предела. Исходя из происхождения иррациональных чисел, заметим, что они появились как арифметические квадратные корни, и обнаружилась невозможность тех операций, которые можно выполнять над целыми числами и дробями. В огромном числе случаев перед этой невозможностью останавливались, но (подобно тому, как дроби стали считать арифметическими числами) нужно вернуться к простой концепции целого и разобраться, чтобы убедиться в том, что эта невозможность может быть преодолена, она обусловлена не фактической неспособностью, а ограниченным понятием числа. Эта концепция попрежнему открыта для расширения, путём которого в арифметику могут быть введены новые числа, реальные, по крайней мере в общем. С этим трудности в извлечении корней исчезают, как и с другими арифметическими действиями (соответственно расширяется при необходимости и их значение), при этом сохраняются их основные свойства.

Таким образом, вы видите, что даже с дробными числами понятие числа не достигает общности. Но оно может быть удобно расширено с привлечением геометрии в помощь арифметики, так как именно в геометрии видно, что, используя лишь целые и дробные числа, невозможно измерить огромное число линий (отрезков) с помощью заданной единицы измерения. Это подводит нас к тому, что число есть ничто иное, как результат измерения определённой длины, и его понятие необходимо расширить, и ввести в арифметику новые числа.

А геометрия открывает нам, каким образом может быть сделано введение этих арифметических чисел.

Представим себе прямую, неподвижную точку 0 и единицу меры, и отметим на прямой вправо и влево точки, расстояния которых от 0 по отношению к единицам измерения выражаются рациональными числами (целыми или дробными, положительными или отрицательными). Как бы много точек мы ни поставили, всегда останется множество других точек m, m', m'',..., которые будут как угодно близки. Отмечая растущее количество точек деления соответствующих рациональных чисел, они никогда не могут быть достигнуты, как, например, точка, соответствующая концу диагонали такого квадрата, который имеет площадь, равную стороне, длина которой выражается рациональным числом. Когда расстояния $0m$, $0m'$,... не могут представляться рациональными числами, но желательно их численно выразить, будет важно ввести новые числа. Когда это будет сделано, они, как и все другие расстояния (новые или старые), будут выражены числами от 0 и диапазон чисел будет значительно расширен. Теперь пусть $0m$ – это расстояние, соответствующее одному из новых чисел. Очевидно, что все расстояния, соответствующие *рациональным* числам, можно разделить на два класса, какие-то меньше $0m$, а какие-то больше $0m$, и что замечательно, увеличивая числа первого класса и уменьшая числа второго класса, мы будем получать расстояния, приближающиеся к $0m$, выраженные рациональными числами. Понятно, однако, что первые меньше вторых и меньше $0m$, и наоборот, поэтому $0m$ можно рассматривать как число, соответствующее данной величине, для которой величины двух классов сближаются и отличаются соответственно меньше и больше. Но они никогда не достигают его как числа, соответствующего величине $0m$, через которую проходит граница между двумя классами количеств, о которых мы уже говорили, в разложении переменных, соответствующих рациональным числам.

§ 2. Предлагаем теперь арифметическую концепцию того же расширения понятия числа, независимую от геометрии, в отличие от арифметики имевшей прекрасную наглядность. Представьте себе разложение рациональных чисел на два класса A_1 и A_2 такие, что числа первого класса меньше, чем второго, но самое большое из чисел первого класса совпадает с одним из первых чисел второго класса. Следовательно, каждое рациональное число можно отнести к одному или к обоим классам[117]. Тогда вы можете ввести два новых класса рациональных чисел в порядке возрастания в первом и в порядке убывания во втором, приближающихся к рациональному числу a. И наконец, расширение этого может быть достигнуто в процессе, намеченном в поле рациональных чисел; тот самый рубеж, который обозначает границу между числами двух классов, но может и не быть достигнут, то есть может не быть найдено число, обозначающее границу между числами двух классов, хотя числа этих классов могут оказаться произвольно близко друг к другу.

Теперь второй случай, когда числа соответствуют соизмеримым величинам; для них допустима делимость до бесконечности (как для расстояний, рассчитываемых на прямой). Два класса чисел A_1 и A_2 в большом числе случаев (например, как вы видели выше, для некоторых участков линий), обладают тем свойством, что значения, соответствующие этим числам и затем рассматриваемые в порядке увеличения в первом классе и в порядке уменьшения во втором классе, неопределённо приближаются друг к другу. Они представляют единственную величину, существование которой, как известно, априорно, но никогда не может быть достигнуто, с учётом размеров соответствующих рациональных чисел из двух классов и которая обозначает границу между величинами двух классов. Если этой величине будет присвоено соответствующее число, что-то реальное, то следовательно, вы можете сказать, что рассматриваете и дальше в том же порядке указанные числа двух классов A_1 и A_2 и так далее, чтобы получить число, которое хотя и не является рациональным, но оно (как и рациональное число) является величиной, которая имеет реальное существование. Хотя оно никогда не может быть достигнуто только за счёт количества соответствующих рациональных чисел, но это наглядно демонстрирует смысл при рассмотрении чисел в двух последних абзацах.

Теперь рассмотрим любое из вышеперечисленных разложений рациональных чисел на два класса A_1 и A_2, и представим себе, что мы добавляем в каждом классе новое всегда рациональное число, восходящее число в первом классе и нисходящее число во втором классе. Если

---

[117] Это можно показать на таком примере: можно разбить рациональные числа на два класса, так, что в первый класс войдут рациональные числа, квадраты которых меньше заданного рационального числа d, а во второй войдут такие числа, квадраты которых больше, чем d. – *Примеч. Дини.*

производить этот процесс, то никогда не удастся найти рациональное число, которое обозначает границу между числами двух классов, и вопреки тому, что я должен был получить на самом деле, даже неизвестна априорно заданная величина, к которой мы всё время приближаемся с помощью нашего процесса. Поскольку множество рациональных чисел состоит из двух классов, то в результате добавления вы можете себе представить, как с помощью одних величин определяется другая, где осуществляется бесконечная делимость, и эти величины всё более и более сближаются, различаясь на любую заданную величину, а сам процесс может продолжаться неопределённо долго. Не будет противоречием, что существующие величины определяются таким способом[118]. Поэтому мы можем, представляя эти масштабы, расширить понятие числа как существующего и присвоить ему соответствующее числовое значение, в любом случае связанное с разложением рациональных чисел без условного знака и рассмотрим это как новый вопрос в следующей главе. [14, с. 1–2]

§ 3. Далее определение числа по Дедекинду (…)

§ 10. Теория точечных множеств по Кантору (…). Группы чисел или точек, их верхние и нижние пределы (...) [14, с. 14].

§ 12. Мы будем называть предельной точкой множества точку x, обладающую тем свойством, что в её любой сколь угодно малой окрестности всегда находится бесконечно много точек y, а потому в процессе последующего деления интервала (α, β) на $2, 2^2, 2^3, 2^4$,... равных частей (§ 9) (учитывая, что вы получите по крайней мере два интервала рядом, содержащих бесконечное множество точек множества, а затем учитывая, что отрезок, например, первый, убывает и содержит бесконечно много точек) всегда приводит к созданию этих предельных точек, вы можете быть уверены, что *если множество G содержит бесконечное количество точек, то всегда будет существовать по крайней мере одна предельная точка, которая может и не принадлежать этому множеству,* и во множествах могут существовать бесконечно удалённые предельные точки, потому что вы будете иметь возможность проходить через интервалы, удаляясь в процессе, что и доказывает, что есть бесконечное число точек, среди которых содержатся даже бесконечно удалённые точки. *Множество всех предельных точек множества G Кантор назвал производным множеством и обозначил его G'. И т. д.*

---

[118] Так рассуждал Дюамель, а до него Больцано.

§ 15. Теперь рассмотрим любое множество чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ данных между двумя конечными числами α и β (α и β включены или нет), а λ обозначим такое число, что ни один из y не превосходит λ, а также для любого произвольно малого положительного числа σ будет выполняться λ – σ и λ (λ включено) всегда есть одно или несколько из чисел y. Говорят, что это число *является верхним пределом чисел* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, *или верхней границей множества*, *и если это будет одно из них (например, если это конечные числа), то это будет максимальное число, а если λ не входит в состав чисел* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, *тогда среди этих чисел нет максимального, и λ является их верхним пределом.*

Теперь, *независимо от того, каков состав чисел* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, *заключённых в конечном интервале* (α, β) (α и β включены или нет), легко показать, что *в этом интервале* (*края* α и β *включены*) *для них всегда существует верхняя граница* (который в каких-то случаях будет являться их максимумом). (...– доказательство).

Аналогично рассматривая нижнюю границу чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, мы могли бы показать, что всё данное множество чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, заключённых в конечном интервале (α, β) (α и β включены), имеет нижнюю границу, причём это числовое значение в некоторых случаях будет минимальным среди них.

Далее Дини распространяет это рассуждение для случая, когда один из краёв интервала бесконечен [14, с. 28–29].

§ 16. Следует отметить, *что если количество чисел* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *бесконечно, и среди них есть максимальное, то всегда существует число, являющееся верхним пределом множества, а затем найдётся наибольшее в первом производном множестве*, потому что какое бы произвольно малое σ мы ни взяли, $\lambda - \sigma_1$ и $\lambda - y$ всегда должны численно убывать, отличаясь от λ; обозначим y' такую величину из y, которая заключается между λ – σ и λ, и пусть σ′ есть положительное число, меньшее чем $\lambda - y'$, тогда можно будет сказать, что между $\lambda - \sigma'$ и λ будет существовать число y''; взяв теперь положительное число σ'', меньшее, чем $\lambda - y''$, между $\lambda - \sigma''$ и λ выберем y''' и так далее. Очевидно, что между λ и λ – σ находится целый ряд из бесконечного количества y, и, следовательно, λ есть предельное число рассматриваемого множества [14, с. 21].

Концепция предела. Бесконечно малые и бесконечно большие[119]

§ 17. Понятие предела одно из самых фундаментальных во всей математике. Мы встречаем его в геометрии, арифметике, дифференциальном и интегральном исчислении, в Анализе и всех приложениях этих наук, и надо сказать, что когда мы говорим о неизмеримых числах и числовых множествах, некоторые понятия мы основываем на этой же концепции, чтобы установить это точно и строго [14, с. 21].

Пусть имеются некоторые величины y, рассматриваемые в зависимости от величин x, которые, за исключением только отдельной величины $x = a$, всегда имеют фиксированные конечные значения (то есть по абсолютной величине не должны превышать заданное число). Независимо от того, какими величинами являются x, они образуют непрерывный ряд чисел или дискретный ряд (последовательность) чисел (то есть образованный бесконечной группой значений, для которых a есть *предельная точка*). Если существует конечная определённая величина A, обладающая свойством, что найдётся сколь угодно малое положительное и отличное от нуля число σ, такое, что на неё неопределённо отличается x в большую или меньшую сторону при приближении к величине a, по нашему предположению конечной, и никогда не достигает $x = a$; тогда разность $A - y$ *останется и всегда будет оставаться* меньше по абсолютной величине, чем выбранное число σ; иначе говоря, A есть предельное значение, полученное для y, когда x увеличивается или уменьшается или, что не ограничивает общности, изменяется на прямой произвольно, и слева и справа от a. И в дальнейшем мы будем говорить, что y имеет предельные значения справа или слева от a, или, проще говоря, правый или левый предел y при $x = a$, или при $x = a + 0$, $x = a - 0$ соответственно[120] [14, с. 21].

Тогда, если для бесконечно близких x и a справа или слева, y принимает также и бесконечные значения (то есть численно большие, чем заданное число) или произвольно большие по абсолютному значению, то если

---

[119] Улисс Дини первым определил односторонний предел и непрерывность через односторонние пределы.

[120] Эти символы $a + 0$, $a - 0$ часто используются для указания точки справа или слева от a соответственно, и сколь угодно много соседних с ней (a исключено), и мы будем использовать это обозначение в том же смысле, когда для сколь угодно малого и положительного числа σ можно будет найти такое ε, положительное в первом случае и отрицательное во втором, что для всех значений x, расположенных между a и $a + \varepsilon$ (a исключено), разность $A - y$ всегда будет меньше, чем σ. – *Примеч. Дини.*

для произвольно большого положительного числа ω можно найти положительное число ε больше нуля, чтобы положительные значения x, которые мы рассматриваем справа от a и отрицательные, если мы рассматриваем их слева от a, таковы, что для всех значений x между a и $a + \varepsilon$ (a исключено) y всегда остаётся по абсолютному значению больше, чем ω, мы будем говорить, что значения y не определены при приближении x к a справа или слева, и ограничены $\pm\infty$. Или ещё можно сказать, что y при $x = a$ справа или слева в пределе равен $\pm\infty$, не имея определённого знака, и, когда между a и $a + \varepsilon$ (a исключено) y сохраняет знак, то в этом случае этот предел будем обозначать $+\infty$ или $-\infty$.

И наконец, когда переменная x растёт до бесконечности, например, для положительных значений, и в соответствии с определёнными законами (например, для целых чисел), то, если существует конечное и определённое число A с тем свойством, что для произвольно малого положительного отличного от нуля числа σ всегда можно найти положительное число x' настолько большое, что для каждого значения x, большего x', соответствующая разность между числовыми выражениями [между числовым значением функции и числом A] всегда будет меньше, чем σ, будем называть A предельным значением для y, когда x неограниченно возрастает, или пределом y для $x = +\infty$. И, наконец, будем говорить, что y имеет пределом бесконечность (положительную или отрицательную) при $x = \pm\infty$, когда для любого сколь угодно большого положительного числа ω найдётся положительное число x', что для каждого рассматриваемого значения x, большего, чем x', y будет по абсолютной величине всегда больше, чем ω, как, например, следующие функции:

$$(x-a)\sin\frac{1}{x-a},\ \frac{1}{(x-a)\sin\dfrac{1}{x-a}},\ \frac{1}{x-a},\ \frac{\sin x}{x},\ x+\sin\frac{1}{x},$$

первая имеет предел ноль при $x = a$ слева и справа от a, вторая имеет предел $\pm\infty$ при $x = a$ слева и справа, третья имеет предел $+\infty$ справа при $x = a$ и $-\infty$ слева при $x = a$, четвёртая имеет нулевой предел при $x = +\infty$, пятая имеет предел $+\infty$ для $x = +\infty$ и $-\infty$ при $x = -\infty$ [14, с. 22–23].

§ 18. Далее, если при удалении x на бесконечность вправо или влево, или при неопределённом изменении x, положительно или отрицательно, y ведёт себя так, что не вписывается в вышеперечисленные случаи, то будем говорить, что y не имеет определённого предела при $x = a$ справа или слева соответственно, или при $x = \pm\infty$. В частности, если y будет конечным, он не будет иметь предела, определяемого в точке $x = a$. Например, справа, когда не будет существовать число A с таким свойством, что для каждого значения σ, меньшего определённого числа, найдётся соответствующий ε (положительный) такой, что значение разности $A - y$ для x между a и $a + \varepsilon$ всегда численно меньше, чем σ, или, другими словами, y не будет иметь предела при $x = a$ справа или слева, независимо от значения A ; всегда есть значения σ, для которых невозможно найти значение величины ε, с тем свойством, что при всех значениях x между a и $a + \varepsilon$ разность $A - y$ всегда численно меньше, чем σ.

Кроме того, y не будет иметь предела при $x = a$ справа или слева при бесконечном приближении x к a, когда численные значения произвольно велики. То есть при произвольно большом значении ω, какое бы малое значение ни принимал ε, то значение y, соответствующее значениям x между a и $a + \varepsilon$ будет то больше, то меньше значения ω по абсолютной величине.

В аналогичных условиях предел y при $x = \pm\infty$, поэтому, в частности, можно сказать, что пределы не определены для функций $y = \sin\frac{1}{x-a}$, $y = 1 + \frac{1}{x-a}\sin\frac{1}{x-a}$ при $x = a$, а для функций $y = \sin x$, $y = x \cdot \sin x$ при $x = \pm\infty$.

§ 19. Эти соображения распространяются и на случай, когда y зависит от большего числа переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Так что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – конечные числа и существует конечное определённое значение A, обладающее тем свойством, что для произвольного положительного сколь угодно малого σ существуют отличные от нуля числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что для значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащих между a_1 и $a_1 + \varepsilon_1$, a_2 и $a_2 + \varepsilon_2$, …, a_n и $a_n + \varepsilon_n$ соответственно (система $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ исключена), разность $A - y$ численно меньше σ, тогда говорят, что A – это предел величины y, при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неограниченно приближающемся к $a_1, a_2, \ldots, a_n$, оставаясь больше или меньше их на $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, соответственно положительных или отрицательных.

И соображения, подобные сделанным выше для одной переменной, распространяются на случаи, когда предел бесконечен или не определён, или когда одно или несколько значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконечно.

§ 20. Остановимся теперь более конкретно на том случае, когда y меняется в зависимости от одной переменной x, непрерывной или дискретной, и заметим, что предельные значения y, которые мы определяем с двух сторон (справа и слева) от конечного числа a, могут быть различными. Следовательно, тогда мы не можем просто сказать, что y при $x = a$ имеет предел A; если двустороннее значение y (слева и справа) в конечной точке a имеет различные пределы, то есть по обе стороны от a пределы различны, или при изменении x не определено, в каком смысле x должен быть ближе к a, тогда это означает один из названных случаев, то есть что наше исследование не прояснило, в каком смысле x приближается к a.

Отметим также, что когда величина y_a явно известна, т. е. y может быть вычислен при $x = a$, мы не должны путать это специальное значение y для $x = a$ с предельными значениями, которых достигает y с той и другой стороны от a. В силу самого определения предела, как мы предполагаем, значения этих величин могут отличаться, потому что предел y зависит от того, вычисляете ли вы y в точках $a - 0$ или $a + 0$ снаружи от предельной точки a, а вовсе не специальное значение y в точке a, и хотя в некоторых случаях и то и другое значение могут существовать и совпадать с y_a, но могут и быть различны.

Примеры. 1. Если значение y будут $\frac{\sin(x-a)}{x-a}$, то величина y_a из y для $x = a$ не будет иметь никакого смысла, так как предельные значения для $x = a$ справа или слева от a будут одинаковы, а значения, которые принимает производная y по x, будут отличаться в a. Если рассмотреть значения функции $(x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a}$, то они при $x = a$ будут равны нулю, тогда как производная по x [в окрестности] a будет $y = 2(x-a)\sin\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a}$.

Однако для случая $y_a = \lim\limits_{h=0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = 0$ при $x = a$ величина y_a из y будет определена и равна нулю, а предельные значения y бесконечны при неопределённом приближении к a справа или слева будут не определены.

2. Если значения y для различных x будут в виде ряда $\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$, то значение y_π, соответствующее $x = \pi$, равно нулю, а предельные значения y справа от π будут (как мы увидим ниже), равны $-1/2\ \pi$, а слева от π будут $1/2\ \pi$.

То же самое относится и к $x = \infty$.

Отметим, однако, что нигде раньше у других авторов нет никакого упоминания о пределе y для $x = a$ (справа и слева), что, когда значения y_a не определены и/или когда они известны, но отличаются в пределе, или когда, наконец, не хотят рассматривать совокупность других значений y слева и справа от a, потому что этот процесс в $x = a$ больше не имеет смысла, и потому то же значение y_a должно на самом деле определять другой процесс. И вообще, когда мы говорим о пределе, идея в том, что это недостижимая величина.

§ 21. Не будем забывать, что существуют ограничения известных теорем о пределах суммы, произведения и пр., когда слагаемые или сомножители, создающие эти суммы или произведения, имеют конечные пределы, тогда и результат будет конечен и определён. Но мы видим, что в некоторых случаях эти теоремы имеют ограничения, например, в случае, когда количество слагаемых или сомножителей бесконечно, или x бесконечно приближается к a неопределённым образом; во многих случаях эти теоремы несправедливы, если, например, как в предыдущем случае, ряд $\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$ имеет предел в $x = \pi$ справа равный $-1/2\ \pi$, а слева $1/2\ \pi$, а сумма равна нулю.

§ 22. Теоремы, о которых мы только что говорили, во многих случаях упрощают поиск пределов, но очень часто это исследование остаётся сложным. Часто, однако, не нужно на самом деле вычислять его, а достаточно просто признания существования конечного и определённого предела A для y, а уже затем просто используют первую или вторую из двух этих теорем для его вычисления.

Для того случая, когда величина x, для которой мы пытаемся вычислить предел y, конечна, служит первая из теорем, она гласит:

Для того, чтобы значения y справа и слева от конечного числа a, например, справа, имели определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого положительного числа σ *существовало положительное число* ε, *такое, что разность* $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ *между значением y в точке* $x = a + \varepsilon$, *т. е.* $y_{a+\varepsilon}$, *и любым другим значением* $y_{a+\delta}$, *соответствующим значению x в* $a + \delta$, *значения y для x между a* и *a* + ε *(a исключено), было численно меньше, чем* σ. Доказательство (…)

§ 23. Подобным образом доказывается и вторая теорема, о которой мы говорили, полезная для того случая, когда ищут предел y для бесконечных значений переменной x, и которая может быть сформулирована так:

Для того, чтобы значения y для бесконечно больших значений x, положительных или отрицательных, допустим, что для положительных, имели конечный определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного произвольно малого числа σ существовало положительное число x' настолько большое, что при всех положительных значениях x, больших, чем x', по абсолютному значению будет $y_{x'} - y_x < \sigma$. Доказательство (…).

§ 24. При доказательстве следующей теоремы используем лемму Гейне.

Теорема: *Если значения y для x, неопределённо близких к a справа или слева, или при x, растущих до бесконечности, всегда остаются конечными, но не имеют конечного предела, то они будут постоянно (непрерывно) колебаться, по крайней мере, некоторые из границ этих колебаний, как ожидается, отличаются друг от друга на величину, отличную от нуля,* как это происходит, например, во-первых, с функцией $\sin\frac{1}{x-a}$, а во-вторых, с функцией $\sin x$.

§ 25. Предыдущие наблюдения приводят нас к следующей теореме. *Если при приближении x к конечной величине a справа или слева, или растущем до бесконечности положительного или отрицательного значения, допустим, что для положительного, величина y всегда сохраняет одинаковый знак, и не растёт или не уменьшается по абсолютной величине, оставаясь однако всегда меньше определённого конечного числа, то для $x = a$ справа или слева или для $x = \infty$, она будет иметь определённый конечный предел.*

(…)Теоремы о сумме и частном.

Понятие функции. Непрерывность и разрывность.

§ 29. Выполнив приведённые выше соображения о неизмеримых числах, множествах точек и пределах, давайте подумаем о функциях, и начнём с формирования понятия функции одного действительного переменного.

Сначала древние использовали слово функция, чтобы выразить различные зависимости, и только Лейбниц и Бернулли, а затем Эйлер, расширили понятие функции, чтобы включить все аналитические выражения, любым способом содержащие соответствующие переменные. В нынешнем (XIX) столетии Дирихле определил понятие функции, не зависящей от каких-либо предположений о возможном аналитическом выражении. Он назвал функцией действительного переменного x в данном интервале (включая крайние точки) такие значения y, каждое из которых *единственно* и *определено* для соответствующего x, независимо от того, определяется ли это соответствие с помощью аналитических операций по переменной x, или каким-либо иным способом.

Рассмотрим это понятие функции, в частности, ограничимся действительными и конечными функциями, а именно: x независимая переменная в интервале и y как некоторая сумма сходящегося ряда, например: $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ для всех x из произвольного интервала y будет определённой и конечной величиной. Или функция x в некотором интервале, определяемая так, что величина y равна нулю для рациональных x и равна единице для иррациональных x, или функция от x в данном интервале, равная x при рациональном x, и равная x^2 для иррационального x, … Но, например, если в интервале, содержащем точку $x = 0$, величина y равна $\sin\frac{1}{x}$, то нельзя рассматривать её как функцию в этом промежутке, ибо её значение в точке $x = 0$ не определено, и только тогда она станет функцией от x, когда вы назначите для неё особое значение для $x = 0$, например, когда вы скажете, что она в этой точке равна нулю.

Следует отметить, что функции определены в общих чертах, пока вы не поставите для них других условий, включающих общие свойства отношений между значениями в различных точках (т. е. при различных значениях x). Когда эти точки, как предполагается, сколь угодно близки друг к другу, и функция имеет значения во всех этих точках (и это несмотря на то, что некоторые законы уже должны быть определены, очевидно, что те из них, которые не относятся к отдельным значениям функции в каждой точке, для бесконечно удалённых точек интервала никто никогда не мог сказать, как полностью определяется функция, определить эти законы); так что, в частности, без каких-либо ограничений, мы не всегда сможем говорить о непрерывности, дифференцируемости и пр.

И с этим определением возникает естественный вопрос: «Возможно ли сохранить все обобщения, содержащиеся в определении функции y от x в данном интервале, всегда ли можно аналитически определить функцию для одной или нескольких переменных для одной или множества конечных или бесконечных операций, которые предстоит сделать над переменной?», и этот вопрос при современном состоянии науки пока не имеет удовлетворительного ответа. Хотя мы теперь знаем это для очень обширного класса функций, но только для таких функций, которые имеют особенности и сами представляют огромные аналитические выражения. Но всё же остаются сомнения, могут ли без ограничений существовать такие функции [с произвольным аналитическим выражением, по крайней мере, в настоящее время при современном развитии анализа, ответить на этот вопрос невозможно], для каждой из которых аналитическое выражение проанализировать в целом невозможно.

Желая сейчас исследовать функцию одной вещественной переменной x, которую мы определили, начнём поиск таких различий, речь пойдёт о непрерывности или разрывах, рассматриваемых в данном интервале.

§ 30. Обозначим $f(x)$ функции, рассматриваемые в данном интервале (α, β) и заметим, что данное нами определение обусловливает единственное значение, определённое в каждой точке в пределах интервала (края включены), и если специально не сказано иное, всегда предполагаем, что это значение действительно и конечно (т. е. все значения расположены между двумя конечными числами).

Будем говорить, что она *непрерывна* для $x = a$ или в точке a, если она имеет значение $f(a)$, когда для произвольного сколь угодно малого положительного отличного от нуля σ будет существовать отличное от нуля положительное число ε, что для всех δ, численно меньших чем ε, разность $f(a + \delta) - f(a)$ будет численно меньше, чем σ, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, где имеет значение $f(a)$, и даже при желании разность $f(a + h)$ и $f(a - h)$, где h – положительное, и для $h = 0$ имеет предельное значение $f(a)$, или, наконец, когда величины $f(a + h) - f(a)$ и $f(a - h) - f(a)$ отличаются бесконечно мало вместе с h.

Будем говорить, что $f(x)$ *разрывна* в $x = a$, если не существует при произвольном положительном σ, соответствующего ε, что для всех значений δ, меньших чем ε, всегда выполняется $f(a + \delta) - f(a) < \sigma$, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ разрывна в $x = a$, когда значения $f(a + h)$ в $f(x)$ справа от a, и значения $f(a - h)$ в $f(x)$ слева от a, не имеют определённых пределов, равных между собой, или отличаются от значения $f(a)$, которое функция имеет в точке a.

Отметим, однако, что если a лежит на краю интервала (α, β), то, как в случае непрерывности, так и в случае разрыва, нельзя говорить о значении $f(x)$ на краю этого интервала, так как невозможно определить значения $f(a+h)$, $f(a-h)$ и $f(a)$.

§ 31. Введём новые различия для разрывов $f(x)$ в точке a.

1. В случае, если точка a не является крайней точкой интервала, и в этой точке имеет место разрыв, для которого функция $f(x)$ имеет значения $f(a+h)$ и $f(a-h)$ справа и слева от a, равные одному и тому же числу A, то непрерывность в этой точке может быть восстановлена, если вместо $f(a)$ взять в качестве значения функции число A, по Риману, *разрыв устраним*, если изменить значение функции в этой точке.

2. В случае, когда точка a разрыва функции $f(x)$ не лежит на краю интервала, и значения $f(x)$ с одной стороны от a имеют предел $f(a)$, а с другой стороны не имеют определённого предела, или отличаются от $f(a)$, то будем говорить, что $f(x)$ *непрерывна с одной стороны* (*правой или левой*) *от* a, и *разрывна с другой стороны*, или просто скажем, что $f(x)$ *разрывна или непрерывна с одной стороны от* a[121].

Если функция $f(x)$ имеет разрыв по одну сторону от a, и этот разрыв такой, что с одной стороны от a функция $f(x)$ имеет определённый предел, то будем говорить, что это *обычный разрыв* или *разрыв первого рода*, а если же значения $f(x)$ не имеют определённого предела, разрыв будем называть *разрывом второго рода*; в случае, когда разрыв можно устранить, изменив значение функции в соответствующей точке, это будет обычный разрыв, а если функция $f(x)$ в точке a, не лежащей на краю интервала, разрывна, она может быть непрерывна с одной стороны, а с другой стороны иметь обычный разрыв или разрыв второго рода, или, будучи разрывной с обеих сторон от точки a, то она может иметь с одной стороны обычный разрыв, а с другой иметь разрыв второго рода, и изменяя значение функции в этой точке, мы можем устранить разрыв по крайней мере, с одной стороны, если это разрыв первого рода, но это невозможно в случае разрыва второго рода.

---

[121] Следует отметить, что теперь у нас есть понятие непрерывной функции в точке a, или с одной стороны от этой точки; т. е., во-первых, для того случая, когда y – это величина, данная для всех значений x, в том числе и в интервале (a, $a \pm \varepsilon$), и справа и слева от a (a включено), случай (§ 20), где значения y_a в точке $x = a$ совпадают с предельными значениями и справа и слева от a, и, во-вторых, для того случая, если только y, рассматриваемый как функция от x, является непрерывной функцией лишь с одной стороны, с правой или с левой, от a). – *Примеч. Улисса Дини.*

И поэтому, когда точки разрыва *f(x)* лежат на краю интервала, мы можем также использовать обычный способ рассмотрения и устранения, изменив значение функции в этой точке.

§ 32. Кроме того, заслуживает внимание тот случай, когда разрыв второго рода с одной стороны от точки a; значения *f(x)* для x, неопределённо близких к a, сами по себе будут продолжать непрерывно колебаться (бесконечно много раз) с амплитудой большей, чем заданное число (§ 24), и тогда значения *f(x)* не будут иметь определённого предела. И у нас есть пример того, что функция в точках x, отличающихся от a, равная $\sin\frac{1}{x-a}$ и в точке $x = a$ равная нулю, при бесконечном приближении x к a с той или с другой стороны точки a продолжает колебаться от –1 до 1.

Кроме того, вы можете также заметить, что функция, непрерывная справа или слева от точки a, или просто имеющая обычный разрыв с обеих сторон этой точки, будет всё-таки в окрестности точки a делать бесконечное число колебаний, амплитуда которых сжимается при бесконечном приближении x к a (§ 24). Так, например, для x, не равных нулю, функцию, равную $x\sin\frac{1}{x}$, в точке $x = 0$ полагаем равной нулю или какому-нибудь другому числу.

§ 33. Также следует отметить, что функция может быть непрерывной или иметь обычный разрыв в точке a, только с одной стороны, например: справа имеет разрыв, и даже разрыв второго рода, а с левой стороны в точках, которые находятся в сколь угодно малой окрестности точки a, при движении вправо сколь угодно близко к a, она произвольно мала (т. е. разрыв в точках справа сколь угодно близко от a); и обратно, происходит разрыв второго рода в точке a справа, и непрерывность слева от точки, которая расположена в окрестности a, сколь угодно близко от a, справа от a[122].

Дело в том, что непрерывность справа от точки a, или обычный разрыв, приводит к тому, что для любого положительного числа σ найдётся такое положительное число ε, что в интервале (a, a±ε), который имеет *нижнюю границу* в a, численно получится (1) $f(a+\varepsilon)-f(a+\delta)<\sigma$.

Вместо того, чтобы быть непрерывной или иметь только обычный разрыв слева от точки $x = a + \varepsilon'$, которая расположена справа от a, и сколь угодно близко неё (от a), это влечёт за собой, что для любого положительного числа σ_1 существует интервал $(a + \varepsilon' - \varepsilon_1, a + \varepsilon')$ и *верхняя*

---

[122] Дини имеет в виду одностороннюю равномерную непрерывность.

граница в фиксированной точке $a + \varepsilon'$, что для каждого x численно выполняется неравенство (2): $f\,(a + \varepsilon' - \varepsilon_1) - f(x) < \sigma_1$, и это показывает только то, что, как мы сказали выше, для условий (1) и (2) из одного не следует другое, так как по мере уменьшения σ всегда продолжает существовать интервал $(a, a + \varepsilon)$, нижняя граница которого в точке a, и где выполняется условие (1), но это не является необходимым для уменьшения σ_1, которое должно продолжать обусловливать существование интервала $(a + \varepsilon' - \varepsilon_1, a + \varepsilon')$ в верхней границе фиксированной точки $a + \varepsilon'$, которая удовлетворяет условию (2), и обратно. (…).

§ 35. Теперь мы говорим, что когда $f(x)$ справа или слева от точки a непрерывна или имеет лишь обычный разрыв, по обозначениям Дирихле, $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$, предел при положительном и стремящимся к нулю h мы будем обозначать $f\,(a + h)$ и $f\,(a - h)$, которые соответствуют $f(x)$ с какой-либо стороны от a (справа или слева).

§ 36. Теорема Вейерштрасса

Теперь будет полезно сформулировать следующую теорему Вейерштрасса о нижних и верхних пределах (или максимальном и минимальном значении функции, реальной и всегда конечной) в заданном интервале. Если $f(x)$ задана в произвольном интервале (α, β) (пределы включены), то по теореме § 15 можно сказать, что существует верхний предел λ и нижний предел μ значений функции в этом интервале. Теперь мы утверждаем, что *в этой области есть по крайней мере одна определённая точка* x' (которая может также лежать на краю интервала), *такая, что значения* $f(x)$, *соответствующие окрестности точки* x' (§ 11), *будут сколь угодно близки к верхнему пределу* λ (Вейерштрасс).

Функции, непрерывные в данном интервале

§ 39. *Непрерывными в заданном интервале* называются такие функции, которые во всех точках этого интервала (края включены) непрерывны. *Непрерывными вообще* в интервале называются такие функции, которые являются разрывными лишь в конечном числе точек этого интервала, так что удаление этих точек вместе с содержащими их произвольно малыми интервалами, оставляет функцию непрерывной на остальной части интервала.

Так, например, функция $x\sin\frac{1}{x}$, если придать ей нулевое значение в точке $x = 0$, непрерывна в любом интервале, между тем функция $\sin\frac{1}{x}$, какое бы значение мы ни придали ей в точке $x = 0$, непрерывна только в общем смысле в тех интервалах, которые содержат точку $x = 0$.

Равномерная непрерывность

§ 40. Перейдём теперь к специальным функциям, которые непрерывны в конечном интервале (α, β) и прежде всего рассмотрим такую функцию $f(x)$, что для произвольно малого отличного от нуля положительного числа σ, для каждого x, принимающего особое значение a между α и β (α и β включены) будет существовать особое (специальное) число ε, отличающееся от нуля и положительное, такое, что для всех значений δ, численно меньших ε, для которых точка (a + δ) остаётся в интервале (α, β), будет выполняться по абсолютной величине $f(a + \delta) - f(a) < \sigma$[123]. Но при том же значении σ (которое соответствует числу ε) возможно, что число ε, которое годится для числа a, не годится для других точек в том же интервале, но тогда нужно его уменьшать; кроме того, возникает сомнение, как это происходит, когда вы бесконечно близки к точке разрыва функции, которая непрерывна лишь в общем смысле, а также непрерывных внутри интервала, при приближении x к специальным точкам, ε можно уменьшать до предела, но он никогда не достигнет нулевого значения (которое было бы нижним пределом всех значений ε). Другими словами, сомнительно, что в некоторых случаях это число ε, отличное от нуля, может служить для всех значений x от α до β (α и β включены), и поэтому целесообразно различать разные виды непрерывности функции в интервале (α, β), а именно *равномерной* непрерывности, и *неравномерной* непрерывности в ином случае, когда для произвольно малого положительного числа σ найдётся отличное от нуля и положительное число ε, такое, что для всех величин δ, численно меньших, чем ε, при которых точка $x + \delta$ находится в интервале (α, β) (α и β включены), будет выполняться по абсолютной величине $f(x + \delta) - f(x) < \sigma$. Как показал Кантор, если $f(x)$

---

[123] Во избежание недоразумений отметим, что мы всегда ограничиваем рассматриваемую величину δ численной величиной ε, *при которой точка* $a + \delta$ *попадает в заданный интервал* (α, β) (α *и* β *включены*), *то есть точка* $a + \delta$, *лежащая между* $a - \varepsilon$ *и* $a + \varepsilon$, *находится внутри интервала* (α, β) достаточно близко к краям α *и* β; никакие из точек $a + \delta$, для которых δ численно меньше, чем ε, фактически не выходят из интервала (α, β). В этом можно убедиться в случае, когда a достаточно близко к краю интервала, например, к α или к другому краю, таким образом, при рассмотрении фиксированного положительного числа $\varepsilon > a - \alpha$, такого, что для точки $a + \delta$, *расположенной между* α и $a + \varepsilon$ (включая a) численно выполняется $f(a + \delta) - f(a) < \sigma$, но тогда некоторые из точек $a + \delta$ при δ численно меньших, чем ε, действительно выходят за пределы интервала (α, β). – *Примеч. Улисса Дини.*

непрерывна в интервале от α до β, для произвольного числа σ всегда существует такое число ε, который служит для всех точек одного и того же интервала, и тогда всё вышеизложенное различие излишне.

§ 41. Эта важная теорема Кантора доказывается следующим образом (…).

§ 42. Отметим, что эта теорема эквивалентна такой: *Если функция f(x) непрерывна всюду в интервале* (α, β), *взяв любое сколь угодно малое положительное число* σ, *всегда можно разложить весь интервал* (α, β) *на конечное число достаточно малых частичных интервалов, величина которых отлична от нуля, таким образом, чтобы изменение функции в каждом из них было бы меньше* σ; потому что если ε это число, о котором сказано выше, и которое соответствует числу σ′, меньшему, чем σ/2, в каждом интервале длины меньшей или равной ε, изменение функции не превзойдёт 2σ′ (§ 37), и все они будут меньше, чем σ.

§ 43. Непрерывные на данном интервале функции обладают также и другими свойствами, которые хоть и могут быть доказаны немедленно, но для большей строгости доказательства требуется специального исследовать эти функции.

Эти свойства содержатся в следующих теоремах, из которых первая, третья и четвёртая главным образом связаны с непрерывностью функции в точке.

Теорема I. *Если функция f(x) непрерывна в определённой точке x′, и определена во множестве точек, для которых x′ является предельной точкой* (§ 12), *тогда она определена и в точке x′*. (Док-во…).

Из этой теоремы непосредственно следует: *если функция f(x) непрерывна в определённом интервале* (α, β) *и определена в точках бесконечного множества G, то она определена во всех точках производного множества G* (множества, являющегося производным по отношению к *G*). (§§ 12 и 13).

Таким образом, мы получаем следующее:

§ 44. Теорема II. *Если функция f(x) непрерывна в некотором интервале* (α, β) *и определена только в точках второго типа множества G, являющихся производными точками, образованными из первого множества, т. е. на полученном множестве G′, которое содержит все точки отрезка, то она будет определена и в остальных точках.*

В частном случае можно сказать: *если функция f(x) имеет одно и то же значение A во всех точках множества G, которое мы сейчас рассматриваем, она будет равна A на всём интервале, и если функция f(x) непрерывна между* α *и* β *и определена во всех рациональных точках этого интервала, то она будет определена и в иррациональных точках,* а также: *если две непрерывные функции в интервале* (α, β) *равны во всех точках множества G, которых в настоящее время указано* 2^a *видов, то эти функции будут равными и в остальных точках.*

§ 45. Теорема III. *Если функция f(x) непрерывна в точке x′, а в точках, отличных от x′, кроме произвольно малого количества точек, функция принимает значения A, или принимает числовые значения, которые отличается от A произвольно мало, тогда f(x′) = A*, например, если *f(x′) = B* при *B* отличном от *A*, тогда *f(x)* в точке *x′* не будет непрерывной.

§ 46. Теорема IV. *Если f(x) непрерывна в точке x′, и при неопределённом приближении x с одной стороны от x′ она конечна и не превышает A, а с другой стороны от этой точки она конечна и меньше A, тогда в точке x′ она будет иметь значение A.*

Ясно, что если бы не выполнялось *f(x′) = A*, то с одной стороны от *x′* функция *f(x′) − A* при бесконечном приближении *x* к *x′* будет в конечном итоге всегда положительной или равной нулю, а при приближении с другой стороны будет всегда отрицательной или равной нулю, а в точке *x′* не равной нулю, следовательно, с какой-то из сторон от *x′* функция не является непрерывной, что противоречит нашему предположению.

§ 47. Теорема V. *Функция f(x), которая в заданном интервале* (α, β) *непрерывна и не равна постоянной, достигает в этом интервале своего наибольшего и наименьшего значения.* То есть в данном интервале (включая края) существует по крайней мере одна точка *x′*, в которой функция имеет значение, не меньшее, чем любое из значений, принимаемых ею на интервале, это значение превосходит все значения в остальных точках интервала, и также в том же интервале существует по крайней мере одна точка *x″*, в которой значение функции не больше, чем любое из значений, принимаемых функцией в других точках, т. е. оно меньше, чем все остальные значения (Вейерштрасс)[124].

В самом деле, обозначим λ верхний предел значений нашей функции *f(x)* в заданном интервале от α до β (включая края). Этот верхний предел

---

[124] Заметим, что для функции, которая не является непрерывной всюду в интервале, это не выполняется в силу теоремы § 36, так как для неё максимальные и минимальные значения, очевидно, не существуют. – *Примеч. Улисса Дини.*

существует (§ 36) по крайней мере в одной точке x', и будет обладать тем свойством, что в каждой, сколь угодно малой окрестности (intorno) верхний предел значений функции $f(x)$ тоже будет λ, поэтому в силу теоремы III, очевидно, $f(x') = \lambda$, поэтому λ максимально.

Точно так же доказывается существование минимума, и, следовательно, теорема доказана.

§ 48. Теорема VI. *Если* $f(x)$ *является непрерывной функцией в* (α, β) *и в этом интервале принимает также различные значения, численно меньшие*[125] *любой данной величины, то в этом интервале существует такая точка* x, *в которой функция примет значение ноль*. [Se $f(x)$ è una funzione continua nell`intervallo (α, β) e in questo intervallo prendre anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, essa per un valore determinato di x nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche in valore zero].

В самом деле, в силу предыдущей теоремы, функция $f^2(x)$, являющаяся непрерывной между α и β (§ 38), достигает минимума, который в то же время будет нижней границей между α и β (края включены). Но по нашему предположению, нижняя граница равна нулю, тогда между α и β (края включены) найдётся значение x, в котором $f(x) = 0$.

§ 49. Теорема VII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна между* α *и* β *и в этом интервале принимает численные значения, сколь угодно близкие к данному числу* A, *тогда для определённого значения* x *из этого интервала она обязательно примет также и значение* A.

Действительно, функция $f(x) - A$ в этом интервале будет принимать значения, численно меньшие любого числа, и следовательно (в силу предыдущей теоремы), когда x примет некоторое определённое значение x' из этого интервала (включая края), функция примет значение нуля, и поэтому будет $f(x') = 0$.

§ 50. Теорема VIII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале между* α и β (α и β включены) *и в некоторой точке* x, *равной* a, *она положительна, а в другой точке* x, *равной* b *из того же интервала* (α и β включены), *она отрицательна, то для некоторого значения* x *между* a и b *она примет нулевое значение*.

Действительно, пусть, например, $a < b$, и образуем множество положительных значений $f(x)$ от a до b (a включено), и обозначим за A нижний предел этих значений. Так как $f(x)$ непрерывна между a и b, то в силу

---

[125] По абсолютной величине.

предыдущей теоремы существует точка x', в которой $f(x') = A$, что и доказывает теорему, если просто придать A значение нуля.

Теперь, допустив, что A отлична от нуля, по теореме из § 42 можно найти число ε, отличное от нуля и положительное, с помощью которого последовательно разделим интервал (a, b) на интервалы $(a, a + \varepsilon)$, $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, $(a + 2\varepsilon, a + 3\varepsilon)$, …, в каждом из которых вариация $f(x)$ по абсолютной величине меньше, чем A; и так как ε отличен от нуля, число этих интервалов конечно, и последний из них $(m\varepsilon, b)$, будет иметь амплитуду меньше ε. Теперь рассмотрим первый из этих интервалов $(a, a + \varepsilon)$, и заметим, что $f(a) > A$, из чего сразу видно, что в нём функция $f(x)$ будет положительной, и следовательно, не меньше A, следовательно, $f(a + \varepsilon)$ будет положительным и не меньше, чем A. Рассматривая второй интервал $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, заключаем, что и в нём функция $f(x)$ всегда положительна, и следовательно, не меньше A, и $f(a + 2\varepsilon) \geq A$, и продолжая так, приходим к выводу, что при A, отличном от нуля, $f(x)$ будет положительна и не меньше, чем A во всех точках интервала, в частности, и $f(b)$ будет положительным и не меньше, чем A, что противоречит нашему предположению. Поэтому мы должны признать, что A равна нулю, и что $f(x') = 0$, следовательно, точка x' не может совпадать ни с a, ни с b, что и доказывает теорему.

§ 51. Теорема IX. *Если функция $f(x)$ непрерывна от* α *до* β *и в обеих точках a и b этого интервала* (α и β включены) *принимает различные значения A* и *B, тогда для одного или более значений x между a и b она принимает некоторое значение C, заключённое между A* и *B*.

Рассмотрим функцию $f(x) - C$, мы видим, что её значения при $x = a$ и при $x = b$ будут противоположны по знаку, отсюда в силу предыдущей теоремы для x между a и b будет существовать по крайней мере одно значение x', для которого $f(x') - C = 0$, то есть $f(x') = C$.

§ 52. Для этой теоремы, как и для теоремы из § 47 сразу же получаем следующее:

Теорема X. *Если функция $f(x)$, непрерывная от* α *до* β, *и в этом интервале хотя бы один раз для определённого значения переменной величины принимает значения между своим максимальным и своим минимальным значением, которые имеются в этом интервале*.

§ 53. Теорема XI. *Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале* (α, β) *и в некоторой окрестности на краю интервала, например, в окрестности* α, *постоянна и равна A, но при этом не равна постоянной на всём интервале* (α, β) *и, допустим например, что* α < β, *то внутри этого* *интервала существует определённая точка x′ такая, что между* α *и x′* (*x′ включено*) *всегда будет f(x)* = *A*, *а для любого интервала* (*x′, x′* + ε) *справа от x′*, *с левой крайней точкой в x′ всегда найдутся точки x*, *в которых не будет выполняться f(x)* = *A*. Доказательство (…)

В «Курсе дифференциального и интегрального исчисления» У. Дини 1907 года это материал повторяется без изменений.

Литература к XII главе

1. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд; пер. с нем. С. О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4 изд. – 44 с.

2. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М., 1985. – 485 с.

3. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд / Н. Н. Лузин. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 550 с.

4. *Полищук Е. М.* Вито Вольтерра (1860–1940) / Е. М. Полищук. – Л.: Наука, 1977. – 114 с.

5. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. – М.–Л. – 1949. – I. – С. 266.

6. *Abel N.-H.* Untersuchungen über die Reiche / N.-H. Abel // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle. – Berlin. – 1826. – 1. – P. 311–339.

7. *Bianchi L.* Commemorazione del socio Ulisse Dini / L. Bianchi // Atti della Reale Accademia dei Lincei. – 1919. – 28 – P. 154–163.

8. *Cauchy A-L.* Cours d’analyse de l’École Royale Polytechnique. Première partie: Analyse algébrique.(1821). Analyse Algébrique / Oeuvres complètes. Ser. 2. – T. 3. 1–471. – P. 120.

9. *Cauchy A.-L.* Note sur les sèries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continue d’une variable réelle ou imaginaire, entre des li,ites données / A.-L. Cauchy // Comptes rendus de l’Academie. – 1853. – XXXVI. – P. 30–36.

10. *Dini U.* Memoria sulla serie a termini positivi / U. Dini //Ann. Univ. – Toscane. – 1867. – IX ii. – P. 41–76.

11. *Dini U.* Sulla serie a termini positivi / U. Dini // Giorn. di Mat. 1868. – VI. – P. 166–174.

12. *Dini U.* Sui prodotti infiniti / U. Dini // Ann. di Mat. – 1868/69. – [2]. – II. – P. 28–38.

13. *Dini U.* Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata / U. Dini // Ann. Di Mat. – Vili. – 1877. – [2]. – P. 121–137.

14. *Dini U.* Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. – 1878. – VIII. – 407 p.

15. *Dini U.* Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. – 1880. – IV + 328 P.

16. *Dini U.* Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen relleen Grösse / U. Dini. – Mit. Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. – Leipzig. – 1892. – XVIII + 554 P.

17. *Dini U.* Lezioni di analisi infinitesimale, due voi / U. Dini. – Pisa: Succ. Nistri, 1907 – 1915. – CI +720+483 P.

18. *Du Bois-Reimond P.* Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leur dérivées / P. Du Bois-Reymond // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle. – Berlin. – 1872. – 74. – P. 294–304.

19. *Du Bois-Reimond P.* Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den Kleisten Intervallen / P. Du Bois-Reymond // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle. – Berlin. – 1875. – 79. – P. 21– 37.

20. *Fourier J.B.* Théorie analytique de la chaleur (1822) / J. B. Fourier // Oeuvres. – Paris, 1888. – V. 1. – P. 227.

21. *Ford W. D.* A Brief Account of the Life and Work of the Late Professor Ulisse Dini / W. B. Ford // Bull. Amar. Math. Soc. Vol. XXVI. – 1920. – P. 178–177.

22. *Goodstein J. R.* The Volterra Chronicles: The life and Times of an Extraordinary Mathematician 1860–1940 / J. R. Goodstein. – AMS (a co-publication of the AMS and the London Mathematical Society). – 2007. – 310 p.

23. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle. – Berlin. – 1872. – 74. – P. 172–188.

24. *Loria G.* Uliss Dini / G. Loria // Gli scienziati italliani dall`inizio del Midio evo ai nostril giorni. – Repertorio bibliographical diretto da Aldo Mieli. Roma. – 1921. – V. I. – parte 1. – 488 p. – p. 137–150.

Глава XIII. ИСТОРИОГРАФИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Литература по истории математического анализа богата и начинается с XVIII века. Здесь будут рассмотрены основные книги и статьи, которые мне удалось прочитать, и которые были значимы для моей работы. Разумеется, перечень не претендует на полноту. Главным образом выделены работы, связанные с историей концепции непрерывности.

1758 год. Многие авторы предваряли свои математические сочинения историческим экскурсом, но первое полное сочинение, специально посвящённое истории математики, написал Жан Этьен Монтюкла (1725–1799). Это была «История математики», два тома которой вышли в 1758 году. Первый том был посвящён истории математики от античности до начала XVII века, второй том – достижениям математики XVII и начала XVIII века. В нём много внимания уделено развитию анализа, исследованиям Ферма, Паскаля, Барроу, Ньютона, Лейбница, И. Бернулли [1].

1768, 1794 годы. Профессор университетов в Лейпциге и Геттингене Авраам Готтфельд Кёстнер (A. G. Kaestner, 1719–1800), в «Основах математики» [2] и во «Введении в анализ бесконечно малых» [3] делает хороший исторический обзор методов анализа. Его курс издавался на русском языке в 1792–1803 годах. В 1796–1800 годах выходила его незаконченная, но хорошо систематизированная четырёхтомная «История математики от возрождения наук до конца восемнадцатого столетия» (Geschichte der Mathematik). Кёстнер даёт широкий историографический обзор большого количества источников. Третий том посвящён истории возникновения анализа в XVII веке.

В 1802 году вышел «Опыт общей истории математики» [4] аббата Ш. Боссю (Charles Bossut, 1730 – 1814). Том I содержит историю математики от античности до XV века, и обзор развития математики и механики в XVI веке. Том II начинается с истории создания анализа бесконечно малых в трудах Ньютона и Лейбница. Подробно рассказано об их работах, а также работах Я. Бернулли, Гюйгенса, Лопиталя. Сам Боссю, математик, механик, внёс большой вклад в теорию корабля и гидродинамику. Поэтому в его изложении большое внимание уделено прикладным вопросам. В 1810 году вышла его «Общая история математики» (Histoire générale des mathématiques) в двух томах.

1817 год. Об истории теоремы Ролля писал Бернард Больцано (B. Bolzano, 1781–1848), в работе 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [5]. Больцано анализирует доказательства Кёстнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга и других математиков. Правда, некоторые из книг он упоминает без близкого знакомства с текстами. Это относится к работам Рёслинга и Клеро. Больцано близко подошёл к анализу основных противоречий в доказательствах и первым признал необходимость арифметизации анализа, его освобождения от механических и геометрических интерпретаций в основных концепциях, прежде всего в концепции непрерывности.

1821 год. Огюстен Луи Коши (A. L.Cauchy, 1789–1857) сравнивает методы Декарта, Ньютона и Лагранжа в своём «Курсе анализа» 1821 года [6].

В 1834 году профессор университета в Лейпциге М. В. Дробиш (M. W. Drobisch, 1802–1896) выпустил «Лекции по уравнениям высших порядков» [7], где в §107 [7, с. 161] рассказывает о методе каскадов Ролля.

В 1874 году в Лейпциге вышел сборник статей Германа Ганкеля (Hermann Hankel, 1839–1873) [«История математики в Древности и в Средние века» [8]. Этот курс содержит много глубоких историко-математических идей, но заслуживает некоторых упрёков в строгости изложения, что отмечал Кеджори. Недолгая жизнь не позволила Ганкелю продолжить изложение истории далее, но он написал две интересные статьи по развитию анализа. Первая из них – это его лекция в 1869 году «Развитие математики в последние столетия» [9]. Главным предметом этой лекции является именно история анализа. Ганкель кратко рассматривает развитие основных понятий от Евклида и Архимеда, развитие анализа и теории функций, включая комплексные, касается работ Кеплера и Кавальери, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Лопиталя, Лагранжа, Эйлера, Коши, Римана, Понселе, Мёбиуса, Шаля, фон Штауда. Его обзор заканчивается творчеством Гаусса.

Ганкель придаёт большое значение характеру математики, развившейся в языковой среде латинизированных языков, и её отличию от немецкоязычной математики. Проводит он и отличия в философских основах различных языковых культур. Обращает особое внимание на геометрический смысл понятий анализа, называя геометрию «царской дорогой» математики. В этой лекции, в частности, он говорит: «Княжество математики теперь бесспорно приходится на Германию; такие математики Франции, как Шаль, Лиувилль и ещё несколько энергичных ветеранов не имеют достаточного количества учеников, которые могли бы успешно конкурировать с немцами, а учиться у немцев французы не любят» [9, с. 29].

В 1871 году Ганкель написал интереснейшую статью о понятии границы (предела) [10]. Эта статья замечательна тем, что в ней дано систематическое изложение основных понятий – функции, предела функции в точке, непрерывности – за год до появления первых работ Кантора по теории множеств.

Вначале Ганкель приводит определение предела, данное Коши в его курсе 1821 года. Далее он начинает историю понятия предела с апорий Зенона, обсуждаемых Аристотелем; рассматривает X книгу Евклида, посвящённую классификации неизмеримых величин, и анализирует её подробнейшим образом. Потом Ганкель переходит к понятию границы (предела) в методах Архимеда. Рассматривает понимание бесконечности в различных культурах. Ганкель внимателен к работам Михаэля Штифеля, Ферма, Роберваля, Паскаля и Валлиса. Указывает на развитие понятий предела и бесконечности в работах Лейбница, отмечая сопутствующее ему развитие понятия функции. Но самую главную роль в истории понятия предела Ганкель отводит Бернарду Больцано, назвав его работы 1817 и 1851 годов. Ганкель цитирует его понятие предела функции в точке, после чего обращается к понятиям интегрируемости по Риману, дифференцируемости, непрерывности (по Вейерштрассу, без упоминания) и разрывности функций. Ганкель рассматривает тригонометрические ряды и понятие предела функции в точке на языке «ε–δ». Рассматривает Ганкель также предел функции комплексного переменного и функции нескольких аргументов; затем понятие функции, непрерывной на отрезке, и далее переходит к своему принципу сгущения особенностей. Излагает он также разложение в степенные ряды и их сходимость, рассматривает знаменитый пример Абеля, опровергающий ошибочное утверждение Коши о том, что сходящийся всюду ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную же функцию. Приводит основные теоремы о непрерывных функциях. Характеризует работы Дирихле, Якоби и Гаусса в теории рядов. Рассматривает понятие предела и непрерывности для определения определённого интеграла через предел интегральных сумм. Рассматривает сходимость и понятие предела суммы ряда в историческом развитии, начиная с работ Кеплера, Кавальери, Гвидо Гранди, Лейбница, Иоганна и Якоба Бернулли, Ньютона, Мак Лорена, Эйлера, Раабе, Клюгеля, Лагранжа. Особо отмечает работы Прусского аналитического института (Лейпциг) начиная с 1813 года. Ганкель отмечает значение метода Ролля для развития понятия предела в теории рядов и, в частности, в работе Лагранжа «Теория аналитических функций». Ганкель отмечает изложение идей Лагранжа в учебниках Лакруа, «Курс алгебраического анализа» Коши 1821 года. Но Ганкель признаёт приоритет перед ним Бернарда Больцано в теории рядов, указывая на его ранние работы 1816 года.

Началом критического периода теории рядов по отношению к французским результатам Ганкель называет 1826 год, обращение к традициям Гаусса, работу Абеля 1826 года, публикации в журнале Крелле. На этом заканчивается исторический обзор Ганкеля, намеренно не коснувшегося имён современников и соотечественников.

В 1873 году Карл Вейерштрасс в «Речи, произнесённой при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года» [11] говорит о необходимости обращаться к истории математики: «В страницах мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному» [11, с. 1327]. Сам Вейерштрасс следовал этому правилу и обращался к классикам математического анализа, что мы видим в его лекциях 1886 года по основаниям теории функций [12], где он рассматривает историю возникновения понятия функции, сравнивает определения Якоба Бернулли, Лейбница, Эйлера, Лагранжа, даёт сравнительный анализ понятия функции у Лейбница и Иоганна Бернулли, характеризует подходы к понятию функции Карно, Коши, Дирихле.

В 1897 году на смерть Вейерштрасса откликнулся М. А. Тихомандрицкий, произнеся на заседании Харьковского математического общества памятную речь с обзором творчества Вейерштрасса [13].

В 1906 году в Казани в первом выпуске «Начала анализа в элементарном изложении» был опубликован «Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых» А. В. Васильева [14].

В период с 1892 по 1898 годы в «Записках Новороссийского общества естествоиспытателей» выходили «Основания теории аналитических функций» И. Ю. Тимченко – текст его магистерской диссертации. Часть первая «Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории функций» [15] была первым трудом по истории аналитических функций, что признают и зарубежные историки. В первой части содержался обзор и анализ исторических сведений от античности до XVIII века. Вторая часть «Исторических сведений», в которой Тимченко обещал продолжить исследования по теории функций XIX века и рассказать об открытии теории множеств, так и не была написана. В своё время эта работа Тимченко оказала влияние на А. П. Юшкевича.

В 1907 году в «Известиях Томского технологического института» была опубликована магистерская диссертация В. Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей» [16]. Защищал диссертацию Некрасов в Московском университете одновременно с И. И. Жегалкиным. Первая глава его диссертации содержит исторический обзор теории точечных областей. Наряду с развитием теории функций он выделяет появление теории аргумента, понятия области начиная с работ Больцано, далее очень тщательно фиксирует появление работ по теории множеств, теории меры, появление понятий внутренней и внешней точки множества в работах математиков конца XIX – начала XX веков.

В 1908 году вышел IV том лекций по истории математики Морица Кантора [17], посвящённый периоду 1758–1799 годов.

1910 год. Феликс Клейн (Felix Christian Klein, 1849–1925) преподавал в Эрлангене, Мюнхене, Лейпциге и Геттингене. Основные работы в области геометрии. Ещё в 1893 году Клейн читал лекции по истории математики для участников Математического Конгресса в Чикаго, эти лекции были переведены на польский язык С. Дикштейном и изданы в Варшаве в 1899 году.

С 1910 года Клейн работал над историей математики XIX века. Во всех исследованиях Клейна отличал поиск внутренних связей между различными областями математики. Историю математики он излагает во взаимосвязи её разделов и в тесной связи с запросами техники, физики, астрономии, геодезии. В 1926 году вышла его книга «Лекции о развитии математики в XIX столетии» [18], в русском переводе [19]. Он даёт историю развития математики в немецкой, французской и английской математических школах, уделяя внимание проблемам обоснования анализа. Клейн высоко оценивает обоснование анализа Коши, заметив, что понятие непрерывности функции в точке было до него сформулировано и проанализировано Больцано, на которого Коши не ссылается. Говоря о немецкой школе математического анализа, Клейн высоко ставит Гаусса и в то же время признаёт за Дирихле роль тонкого интерпретатора таких основных понятий анализа, используемых Гауссом, как условная сходимость рядов. Клейн выделяет основание в 1826 году журнала Крелле как важный фактор развития математики. Особенно высоко Клейн характеризует достижения и школу Вейерштрасса, в семинаре которого он участвовал, что не мешало ему ярко и часто субъективно критиковать некоторые научные методы Вейерштрасса. Клейн выделяет источники творческих поисков Вейерштрасса: «историческое наследство в виде проблемы абелевых функций, сформулированных Якоби, и систематичность его мышления, заставившая его довести начатое изучение до степени законченного исследования» [19, т. 1, с. 330]. Но Клейн замечает, что в отличие от Римана, Вейерштрасс не черпал проблемы из приложений математики и в отличие от Кронекера не пользовался никаким философским логическим постулатом.

В 1924 году вышел 6-й том «Истории элементарной математики» Иоганна Тропфке [20], посвящённый истории математического анализа и аналитической геометрии.

Интересны историко-математические работы Лузина: доклад 1927 года с дополнениями 1933 года «Современное состояние теории функций действительной переменной» [21], где он подробно анализирует все противоречия развития теории функций конца XIX – начала XX веков; а также его статья в Большой Советской Энциклопедии 1935 года «Функция» [22], где он рассматривает историю понятия функции от И. Бернулли (1727 год) до С. Н. Бернштейна (1925 год).

В 1928 году вышла очень удобная справочная книга американского историка математики Флориана Кеджори (1859–1930) «История математических обозначений» [23].

В 1935 году вышел перевод на русский язык «Анализа бесконечно малых» Лопиталя под редакцией, со вступительной статьёй и примечаниями А. П. Юшкевича [24]. Укажем также важные работы А. П. Юшкевича по истории понятия предела «Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке» [25], Хрестоматия по истории математики. Математический анализ [26], «Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса» [27].

В 1972 году вышел второй том «Истории математики» под редакцией А. П. Юшкевича «Математика XVIII столетия» с главой «Дифференциальное и интегральное исчисление», написанной Юшкевичем [28].

В 1951 году вышли «Очерки по истории теории аналитических функций» Маркушевича А. И. [29], где выделена роль российских математиков Эйлера, Лобачевского и Чебышёва в развитии теории функций комплексной переменной. Его же переработанная и дополненная «Теория аналитических функций» вышла в 1981 году в книге «Математика XIX века» [30].

В 1958 году на русском языке появилась статья К. Рыхлика «Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано»[31], посвящённая исследованию написанной около 1830 года неопубликованной рукописи Больцано «Учение о величинах».

В 1963 году вышла «История математики» К. А. Рыбникова, в которой он внимательно исследует роли О. Коши, Б. Больцано и К. Вейерштрасса в развитии понятия непрерывности [32].

Истории теории функций и теории множеств посвящены работы моего учителя, московского историка математики Ф. А. Медведева (1923–1993). Помимо статей в историко-математических изданиях, он написал книги «Развитие теории множеств в XIX веке» [33], «Очерки истории теории функций действительной переменной» [34], «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.» [35], «Ранняя история аксиомы выбора [36]. В его работах дан подробный разбор математических идей XIX века. Отметим важную для нас статью Ф. А. Медведева «Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле» [37].

В 1965 году вышла статья С. С. Петровой «Принцип Дирихле в работах Римана» [38].

1966 год. Роли тригонометрических рядов во взаимосвязи с разделами анализа посвящено глубокое исследование А. Б. Паплаускаса «Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега» [39], изданное в 1966 г.

В 1970 году вышла статья английского историка математики Айвара Граттан-Гиннесса «Больцано, Коши и «Новый Анализ» начала XIX века» [40]. Эта статья подробно рассмотрена нами в пятой главе.

В 1971 году вышла статья А. В. Дорофеевой «Формирование понятия непрерывной функции» [41], в которой рассматривается история вопроса от античности до работ Коши.

Большой вклад в историографию анализа сделал французский исследователь боснийского происхождения Пьер Дюгак (Pierre Dugac, Dugak 1926–2000). Ему принадлежат находки ценных математических документов, в их числе первые лекции Вейерштрасса, и исследования по истории XIX века. Назовём среди них статьи о Шарле Мере [42], Карле Вейерштрассе [43], Рихарде Дедекинде [44], по истории полных пространств [45], «Основания анализа» [46], а также его с соавторами большая «История анализа: о концепции предела и сопутствующих понятиях» [47]. На русском языке есть небольшая статья Дюгака «Понятие предела и иррационального числа. Концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса» [48].

1978 год. Истории понятия связности в топологии посвящена наиболее уважаемая топологами статья Уайлдера «Развитие топологического понятия «связный» [49], хотя он рассматривает развитие понятия, начиная с Фреше и Хаусдорфа.

С 1979 года выходят работы Йозефа Даубена по истории теории множеств. Назовём его книгу «Георг Кантор. Его математика и философия бесконечности» [50].

В 1981 году вышла статья Э. Ноеншвандера по истории теории функций комплексной переменной и связях французской математической школы с Риманом и Вейерштрассом, о трёх направлениях обоснования теории функций комплексной переменной, исходящих от Коши, Римана и Вейерштрасса [51].

В 1981 году вышла книга американской исследовательницы Юдит Грабинер «Происхождение строгого исчисления Коши» [52], её статья «Смена концепции изменения: производная от Ферма до Вейерштрасса» [53], а также очень полемичная статья «Кто дал вам эпсилон? Коши и происхождение строгого исчисления» [54].

В 1985 году появилась очень хорошая статья датской исследовательницы истории математики Кирсти Андерсен «Метод неделимых Кавальери» [55].

В 1985 году вышла книга П. Я. Кочиной «Карл Вейерштрасс» [56]. В книге содержится анализ развития концепций числа и функции в лекциях Вейерштрасса [56, с. 92–101], а в приложении приводится её перевод статьи А. Пуанкаре «Математическое творчество Вейерштрасса» [56, с. 246–253].

В 1986 году вышла книга итальянского историка математики Умберто Боттаццини «Высшее исчисление: история действительного и комплексного анализа от Эйлера до Вейерштрасса» [57], в которой подробно рассматривается процесс арифметизации анализа (с. 257–294), уделено внимание спорам по поводу строгости доказательств и определений. Много внимания уделено Больцано [57, с. 91–97], Коши, определению функции Дирихле и её интерпретации Ганкелем (там же, с. 197–201), чью строгость высоко оценил Улисс Дини. Автор обогащает картину развития анализа XIX века материалами итальянской математики – результатами и комментариями Казорати, Бетти, Дини и других.

В 1990 году появилась интересная статья С. С. Демидова о законе непрерывности у Лейбница и о понятии непрерывной функции у Эйлера [58].

В 1993 году вышли две статьи польского историка математики Витольда Венслава «Немецкие аналитики на рубеже XIX и XX века» [59], посвящённые творчеству Римана, Вейерштрасса, Неймана, Клебша, Ганкеля, Рунге, Бирмана, Гурвица, Кёбе и Бибербаха; а также «Развитие теории алгебраических и абелевых функций» [60].

Математикам Петербурга Буняковскому, Остроградскому, Сомову, Чебышёву, Коркину, Золотарёву, Сохоцкому, Поссе, А. Маркову, Сонину, Ляпунову, Стеклову, работавшим в области аналитических функций, посвящена статья Н. С. Ермолаевой «Петербургские математики и теория аналитичеких функций» [61].

В 1995 году вышла статья Э. Жиспе по истории теории множеств во Франции до 1905 года о Бэре, Бореле, Лебеге и других [62].

В 1996 году вышла книга польского тополога и исследователя истории и философии математики, профессора польского университета в Катовице Ежи Медушевского «Непрерывность» [63]. Он излагает историю понятия непрерывности от античности до начала XX века, уделяя особое внимание топологическому аспекту этого понятия, рассмотрев концепции основных творцов математического анализа и внутреннюю связь различных исторических тенденций.

В 1997 году вышел историко-математический курс видного историка математики, преподавателя Вроцлавского университета В. Венслава «Математика и её история» [64], содержащий подробный экскурс в историю анализа.

В 1998 году выходит большая статья «История теории континуума» Я. Харатоника [65]. Он рассматривает топологическую линию истории от Кантора и Жордана до работ польских математиков первой половины XX века.

В 1999 году вышла книга Д. Анаполитаноса «Лейбниц: представление, непрерывность и феномен пространства – времени» [66], содержащая анализ принципа непрерывности Лейбница.

В 1999 году голландский историк и философ математики и логики Теон Кетсиер в соавторстве с Яном ван Миллом написал работу «По плодам их узнаете их». Он рассматривает историю концепции непрерывности от Больцано и Коши до Вейерштрасса, Дирихле, Гейне, Кантора до работ Бореля, Арцела и Асколи, Фреше, Хаусдорфа, Брауэра с позиции истории топологии. Далее он описывает «золотой век топологии» с 1920 по 1960 год, и последующее развитие функционального анализа [67].

В 2002 году вышла статья об истории теоремы о симметрической производной Шварца польского исследователя Леха Грушецкого «История теоремы Шварца о равенстве смешанных производных» [68].

В 2003 году вышла «История математического анализа» от античности до первой трети XX века, написанная блестящим коллективом авторов под редакцией Г. Н. Янке [69].

В 2003 году в датском Технологическом университете города Лилеа, где работает польский математик и историк математики Лех Малигранда, под его руководством была защищена магистерская диссертация Иоганна Тима по истории математики «Непрерывные нигде недифференцируемые функции» [70], содержащая исторический обзор темы с 1830 по 2002 год.

В 2006 году вышла книга Герта Шубринга «Конфликты между обобщением, строгостью и интуицией: концепции числа, лежащие в основании математического анализа 17–19 веков: Франция и Германия» [71].

В 2007 году вышла книга Хосе Феррейроса «Лабиринты мысли: история теории множеств и её роль в современной математике» [72]. В ней обсуждается зарождение и роль теоретико-множественного подхода в математике 1850–1940-х годов, различие во взглядах Кантора и Дедекинда, формирование аксиоматической теории и роль Гёделя.

В 2008 году в Индианском университете была представлена докторская диссертация Лизы Киэл «Теории непрерывности и бесконечно малых: четыре философа девятнадцатого века» [73]. Автор рассматривает историю понятия непрерывности от античности, и даёт сравнительный анализ концепций Кантора, Дедекинда, Дюбуа-Реймона и Пирса. Заметим, что исследования Пирса мало изучены в русскоязычной литературе, хотя у зарубежных историков математики заметен возрастающий интерес к его концепции, например, статья Даубена «Система взглядов Пирса на конечные множества: исследование интересов Пирса о бесконечном в связи с зарождением американской математики времён Кантора и Дедекинда» [74], а также работа бразильской исследовательницы Бачо Марии де Лурдес «Пирс и Кантор: о континууме и бесконечно малых» [75].

В 2008 году вышла книга Хейре и Уаннера «Математический анализ сквозь его историю» – популярная история математического анализа от античности до начала XX века. Книга содержит много фотографий историко-математических документов [76].

В 2008 году в журнале «История математики» вышла статья Грегори Мура «Появление открытых множеств, замкнутых множеств и предельных точек в математическом анализе и топологии» [77].

В 2009 году вышла очень подробная статья Марии Терезы Боргато о развитии понятия непрерывности у итальянских математиков от Бриоши до Пеано, и об их связях с немецкими математиками, о влиянии школы Вейерштрасса [78].

В 2009 году появилась статья Паоло Манкосу «Математический стиль», в которой он определяет различия национальных стилей в математике, в частности, характеризует стиль Вейерштрасса и его влияние [79].

В 2009 году вышла книга Давида Перкинса «Исчисление и его происхождение» [80].

В 2009 году вышла работа Джун Барроу-Грин «От каскадов к исчислению: Теорема Ролля» [81].

Отметим интересную статью Джереми Грея «Берлин 19 века» о Вейерштрассе, Римане и Кронекере [82].

Упомянем также статью «Кто рассказал вам сказку про Коши и Вейерштрасса? Действительная история строгого исчисления» А. Боровика и М. Каца [83].

В 2010 году вышла историко-математическая статья Атанаса Атанасова «Топология и непрерывность» [84].

В 2010 вышла статья К. Чесельского и М. Мослийяна по истории функционального анализа, посвящённая истории некоторых теорем Банаха и его школы [85].

В октябре 2011 года канадская исследовательница Лаура Турнер защитила докторскую диссертацию о роли Гёсты Миттаг-Леффлёра в развитии математики и международных связей в Швеции и за её пределами в 1880–1920 гг.» [86]. Турнер подробнейшим образом исследовала все документы, связанные с деятельностью Миттаг-Леффлёра, уделив значительное внимание его учителю Вейерштрассу и его другу и коллеге Кантору. Миттаг-Леффлёр оценивал различное понимание континуума Вейерштрассом и Кантором, придавая большое значение связи между их определениями в трёхмерном пространстве, что позволило Миттаг-Леффлёру в 1883–1885 годах поставить задачи своему ученику Фрагмену. Она же обращает внимание на преемственность проблематики Кантора в тех задачах об изолированных множествах, которые Миттаг-Леффлёр ставил перед другим своим учеником, Бендиксоном, и важность результатов последнего для теории функций [86, с. 114–117].

В 2012 году вышла интересная статья Петра Блащика, Михаила Каца и Давида Шерри «Десять недоразумений из истории анализа и их разоблачение» [87]. Они критически рассматривают гипотезу об устранении бесконечно малых в работах Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, а также о реформах строгости анализа в работах Коши. Каждый из этих авторов имеет немало работ в области истории основ анализа.

В 2012 появилось краткое наглядное пособие для преподавателей Адама Бешенеи «Краткая история теоремы о среднем значении» [88].

Итальянский исследователь Умберто Боттаццини, профессор университета в Милане, с 1981 по 2013 годы написал многое по истории математического анализа, и особенно комплексного анализа [89–95].

Английский исследователь Джереми Грей, профессор Open University в Великобритании, с 1986 года пишет по истории математики XIX века [96–99].

В 2013 году вышла совместная книга Боттаццини и Грея «Скрытая гармония: геометрические фантазии» [100], посвящённая истории теории функций комплексного переменного в XIX веке. Подробнейшим образом рассмотрены работы Коши, Римана и Вейерштрасса, генезис их идей в историческом, социальном и национальном контексте. На примере семидесяти учебников на девяти языках показано, как складывалась традиция обучения. Описано развитие понятия непрерывности у Коши, Римана, Вейерштрасса, Миттаг-Леффлёра, Кантора, Гарнака, Вольтерра, Арцела, Асколи, Клейна, Пуанкаре, Брауэра, Кёбе, Шварца, Бореля, Гурса, Томе, Адамара. В отношении школы Вейерштрасса дана не только историко-математическая, но и глубокая историко-социальная характеристика, причины меняющихся требований к строгости и допустимому уровню абстракции. К сожалению, не проявлен генезис понятий непрерывности и связности, хотя уделено внимание работам Фреше и формированию функционального анализа.

В 2013 году в американском издании для учителей «Convergence» вышла работа преподавателей Виттенбергского университета (Огайо) Н. Андре, С. Энгдай, А. Паркера «Анализ первых доказательств теоремы Гейне–Бореля» [101].

Литература по исследованию истории основных понятий анализа продолжает появляться, многие работы радуют глубиной и тонкостью анализа, проявлением новых внутренних связей математики, глубиной и тонкостью анализа.

Литература к XIII главе

1. *Montucla J.-E.* Histoire des mathématiques. – Paris, 1763. – T. II – 724 p.

2. *Kaestner A. G.* Der mathematischen Anfangsgründe. 1768–1769 .

3. *Kaestner A. G.* Anfangsgründe der Analysis endlicher grössen. – Göttingen, 1794. – 590 s. – S. 198.

4. *Bossut Ch.* Essai sur l’histoire générale des mathématiques / Ch. Bossut. – Paris. – 1802. – T. I.

5. *Больцано Б.* Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения; пер. Э. Кольмана // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. М., 1955. – С. 170–204.

6. *Cauchy A.* Cours d’analyse de l’Ecole royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique / A. Cauchy // Œeuvres complètes. Série 2, T 3. – Paris, 1882–1974. – 471 s.

7. *Drobisch M. W.* Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen / M. W. Drobisch. – Leipzig. – 1834. – 386 s.

8. *Hankel G.* Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter / G. Hankel. – Leipzig, 1875.

9. *Hankel G.* Die entwickelung der mathematik in den letzten jahrhunderten: Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29. April 1869. – G. Hankel. – 36 p.

10. *Hankel H.* Grenze (Mathematik) / H. Hankel // Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste. Johann Samuel Ersch; Johann Gottfried Gruber; 1868–1871. – P. 185–211.

11. *Вейерштрасс К.* Речь, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года / К. Вейерштрасс; пер. А. Н. Крылова // Успехи физических наук 1999 г. – Т. 169. – № 12. – С. 1325–1328.

12. *Weierstrass K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner–Archiv für mathematic. Band 9. – 272 s. Reprint 1989.

13. *Тихомандрицкий М. А.* Карл Вейерштрасс. Речь, произнесённая на заседании математического общества 28 февраля 1897 года / Сообщения Харьковского математического общества. – Харьков, 1899. – Вторая серия, Т VI. – С. 35–56.

14. *Васильев А. В.* Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых / А. В. Васильев // Papilier G. Начала анализа бесконечно малых в элементарном изложении. Казань – 1906 – С. 1–70.

15. *Тимченко И. Ю.* Основания теории аналитических функций. Ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса: типография А. Шульце. – 1899 – XV+655 с.

16. *Некрасов В. Л.* Строение и мера линейных точечных областей // Известия Томского технологического института. – 1907. – Т. 5. – № 2. – С. 1–102. Т. 6 – № 3. – С. 104–254.

17. *Cantor M.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Viertel Band. Von 1759–1799. Leipzig: Teubner, 1908. – 1113 p.

18. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Julius Springer Verlag, die 1926 und 1927.

19. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Т. 1 – М., 1937 – 432 с. –Т. 2. – М. – Ижевск, 2003 – 239 с.

20. *Tropfke J.* Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, mit bes. Berücks. d. Fachwörter / Bd. 6. Analysis. – 1924. 2., verb. u. sehr. verm. Aufl. – 169 p.

21. *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. – Т. 2. – М.: Наука, 1958 – С. 494–536.

22. *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. – Т. 3. – М.: Наука, 1959 – С. 319–341.

23. *Cajory F.* A History of Mathematical Notations. London 1928. – V. I. – 451 p., Vol. 2. – 392 p.

24. *Лопиталь Г. Ф.* Анализ бесконечно малых / Г. Ф. Лопиталь; пер. с фр. Леви // под ред. А. П. Юшкевича. – ГТТИ, 1935. – 376 с. А. П. Юшкевич. Первый печатный курс дифференциального исчисления. – С. 9–46. А. П. Юшкевич. Примечания редактора. – С. 368–376.

25. *Юшкевич А. П.* Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке / А. П. Юшкевич // Л. Карно. Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых. М. – 1936.

26. *Хрестоматия* по истории математики. Математический анализ / под ред. А. П. Юшкевича. – М.; Просвещение, 1977 – 224 с.

27. *Юшкевич А. П.* Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса / А. П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1986. – XXX. – С. 1–81.

28. *Юшкевич А. П.* Дифференциальное и интегральное исчисление / А. П. Юшкевич // История математики. – Т. 2. – Математика XVIII столетия. – М.: Наука, 1972. – С. 241–369.

29. *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. – М. –Л., 1951 – 128 с.

30. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич // Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1981 – 270 с. – С. 115–255.

31. *Рыхлик К.* Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1958 – XI. – С. 515–532.

32. *Рыбников К. А.* История математики. – Т. 2. – М.: МГУ, 1963. – С. 188–200.

33. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке / Ф. А. Медведев. – М.: Наука, 1965 – 232 с.

34. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного / Ф.А. Медведев. – М.: Наука, 1975 – 248 с.

35. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. – М.: Наука, 1976 – 232 с.

36. *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора / Ф. А. Медведев. – М.: Наука, 1982 – 304 с.

37. *Медведев Ф. А.* Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле. – Историко-математические исследования. – 1975. – 20. – С. 232–245.

38. *Петрова С. С.* Принцип Дирихле в работах Римана / С. С. Петрова // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1965 – XVI. – С. 295–310.

39. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А. Б. Паплаускас. – М.: Наука, 1966 – 278 с.

40. *Grattan-Guinness I.* Bolzano, Cauchy and the “New Analysis” of the Early Nineteenth Century. – Archive for History of Exact Sciences. – Berlin: Springer, 1970. – V. 6. – No. 3–5. – P. 372–400.

41. *Дорофеева А. В.* Формирование понятия непрерывной функции. – История и методология естественных наук.– Вып. XI. – Математика и механика. – М.: МГУ, 1971 – С. 37–50.

42. *Dugac P.* Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite. – Revue d`histoire des sciences et de leur applications. – 1970. – T. 23. – No. 4. – P. 333–350.

43. *Dugac P.* Éléments d'analyse de Karl Weierstrass // Archive for History of Exact Sciences. – 1973. – Vol. 10. – P. 41–176.

44. *Dugac P.* Richard Dedekind et les fondements de la mathématique. – Travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences. – 1976. – No. 24. – 334 p.

45. *Dugac P.* Histoire des espaces complets. –Revue d`histoire des sciences. – 1984. – T. 37. – No. 1. – P. 3–28.

46. *Dugac P.* Fondements de l'analyse. Dans Jean Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques (1700–1900), Vol. 1. – Paris: Hermann, 1978. P. 335–392.

47. *Dugac P.* Histoire de l`Analyse: Autour de la notion de limite et de ses voisinage. – Paris: Ed. Vuibert, 2003. – 419 p.

48. *Дюгак П.* Понятие предела и иррационального числа. Концепции Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса. – Историко-математические исследования. – 1973 – 28. – С. 176–180.

49. *Wilder R. L.* Evolution of the topological concept of "connected" / Amer. Math. Monthly 85 (1978), 720 – 726.

50. *Dauben J. W.* Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite / J. W. Dauben. – Princeton, 1979. – 406 p.

51. *Neuenschwander E.* Studies in the History of Complex Function Theory II: Interactions among the French school, Riemann and Weierstrass // Bulletin (New series) of the American Mathematical Society. – 1981. – Vol. 5. – No. 2. – September. – P. 87–107.

52. *Grabiner J. V.* The Origin of Cauchy`s Rigorous Calculus. Cambrige: MIT Press. – 1981. – 252 p.

53. *Grabiner J. V.* The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass // Mathematical Magazine. – 1983. – Vol. 56. – 4. – P. 195–206.

54. *Grabiner J. V.* Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus / J. V. Grabiner // American Mathematical Mounthly. – March 1983. – V. 90. – No. 3. – P. 185–194.

55. *Andersen K.* Cavalieri`s Method of Indivisibles / K. Andersen // Archive for Histiry of Exact Sciences. – 31(4). – 1985. – P. 291 – 367.

56. *Кочина П. Я.* Карл Вейерштрасс. – М.: Наука, 1985 – 272 с.

57. *Bottazzini U.* The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. – New York: Springer, 1986. – 332 P.

58. *Демидов С .С.* «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера // Историко-математические исследования. – XXXII–XXXIII. – М.: Наука, 1990 – С. 34–39.

59. *Więsław W.* Analitycy niemieccy przełomu XIX – XX wieku / W. Więsław // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. – Kraków, 1993. – Nr. 1522. – P.75–90.

60. *Więsław W.* Rozwój teorii funkcji algebraicznych i abelowych / W. Więsław // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. – Kraków, 1993. – Nr. 1522. – P. 91–107.

61. *Ермолаева Н.* С. Петербургские математики и теория аналитических функций / Н. С. Ермолаева // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1994. – XXXV. – С. 23–55.

62. *Gispert H.* La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres. Revue d`histoire des mathématiques. – 1995. – I. – P. 39–81.

63. *Miodusczewski E.* Ciągłość. – Warszawa, 1996. – 182 c.

64. *Więsław W.* Matematyzka i jej historia. – Opole, 1997. – 416 p.

65. *Charatonik J.* History of Continuum Theory // Handbook of the History of General topology. Vol. 2. – Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 703–786.

66. *Anapolitanos D. A.* Leibniz: Representation, Continuity and the Spatiotemporal. Springer. – 1999. – 195 P.

67. *Ketsier T.* By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics / Teun Ketsier T. and Jan van Mill. – 43 p. Электронный ресурс: http://www.math.vu.nl/~vanmill/papers/papers1999/teun.pdf

68. *Gruszecki L.* Historia twerdzenia Schwarza o równości pochonzch mieszanych / L. Gruszecki // Matematyka czasów Weierstrassa. Materialy XV Ogólnopolskiej Szkoly Historii Matematyki. Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001, pod redakcją Stanisława Fudalego. – Szczecin, 2002. – P.155–161.

69. A History of Analysis. H. N. Jahnke – ed. – AMS, USA. – 2003. – 422 p.; авторский перевод с нем. издания 1999 года.

70. *Thim J.* Continuous Nowhere differentiable Functions. – Lulea. – 2003. – 98 p.

71. *Schubring G.* Conflicts Between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-th – 19-th Century: France and Germany. Springer. – 2006. – 692 p.

72. *Ferreirós J.* Labirynth of Thought: a History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics. – Springer, 2007. – 466 p.

73. *Keele L.* Theories of continuity and infinitesimals: four philosophers of the nineteenth century. Submitted to the faculty of the University Graduate School in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in the Department of Philosophy. Indiana University. – May, 2008. – 350 p.

74. *Dauben. J. W.* C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets: a study of Peirce's interest in the infinite related to the birth of American mathematics and contemporary work of Cantor and Dedekind // Mathematics Magazine. – 1977. – 50. – No. 3. – P. 123–135.

75. *Lourdes Bacha Maria de*. Pierce and Cantor: about the Continuum and infinitesimals // 24-th International Congress of History of Sciense, Technology and Medicine. – Manchester 2013, – P. 337.

76. *Hairer E.* Analysis by Its History / E. Hairer, G. Wanner. – Springer. – 2008. – 377 p.

77. *Moore H. G.* The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. – Historia Mathematica, 2008. – 35. – P. 220–241.

78. *Borgato M. T.* Continuity and discontinuity in Italian mathematics after the inification: from Brioschi to Peano // Organon, 2009. – 4. – P. 219–231.

79. *Mancosu P.* Mathematical Style. 2009. – Электронный ресурс: http://plato.stanford.edu/entries/mathematical-style/

80. *Perkins D.* Calculus and its origin // USA: MAA, 2012. – 180 p.

81. *Barrow-Green J.* From cascades to calculus: Rolle`s Theorem / J. Barrow-Green // The Oxford handbook of the History of mathematics. – Oxford, 2009. – P. 737–754.

82. *Gray J.* Berlin in the 19-th Century / J. Gray // Newsletters of the European Mathematical Society. – 2009. – 72. – P. 29–33.

83. *Borovik A., Katz M.* Who gave you the Cauchy-Weierstrass tale? The dual history of rigorous calculus // Foundations of Science. 17 no. 3 (2012), 245-276.

84. *Atanasov A.* Topology and Continuity. Columbia Science Review. 2010 – 6(2). – p. 33–35.

85. *Ciesielski K.* Some remarks on the history of Functional Analysis / K. Ciesielski, M. S. Moslehian // Annals of Functional Analysis. – 2010. – 1. – P. 1–12.

86. *Turner L.* Cultivating Mathematics in an International Space: Roles of Gösta Mittag-Leffler in the Development and Internationalization of Mathematics in Sweden and Beyond,1880 – 1920. Электронный ресурс: http://css.au.dk/fileadmin/www.ivs.au.dk/css.au.dk/Turner_PhD_Thesis_2012.pdf

87. *Błaszczyk P.* Ten misconceptions from the history of Analysis and their debunking / P. Błaszczyk, M. G. Katz, D. Sherry // ArXiv: 1202.4153. – V. I. – 19 February 2012. – P. 1– 46.

88. *Besenyei A.* A brief History of the Mean Value Theorem / A. Besenyei. – Sarospatak, Hungary, 2012.

89. *Bottazzini U.* Mathematics in a Unified Italy. Pages 165–178 of: Mehrtens, H., Bos, H., & Schneider, I. (eds), Social History of Nineteenth Century Mathematics. Basel: Birkhäuser, 1981.

90. *Bottazzini U.* The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. – New York: Springer, 1986.

91. *Bottazzini U.* The Influence of Weierstrass's Analytical Methods in Italy. Pages 67–90 of: Demidov, S.S., Folkerts, M., Rowe, D.E., & Scriba, C.J. (eds), Amphora: Festschrift führ Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. – Basel: Birkhäuser, 1992.

92. *Bottazzini U.* Va Pensiero: Immagini della matematica nell Italia dell ottocento. Bologna:Il Mulino, 1994.

93. *Bottazzini U.* Italy. Chap. 3. – P. 61–95 // Dauben, J. W., & Scriba, C. J. (eds), Writing the History of Mathematics: Its Historical Development. Basel: Birkhäuser, 2002.

94. *Bottazzini U.* Complex Function Theory, 1780–1900. – P. 213–259 // Jahnke, H. N.(ed), A History of Analysis. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2003.

95. *Bottazzini U.* (eds). Changing Images in Mathematics: From the French Revolution to the New Millennium / Bottazzini U., & Dahan Dalmedico, A. – New York: Routeledge, 2001. – 320 p.

96. *Gray J.* Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré Basel: Birkhäuser, 1986.

97. *Gray J.* Languages for Mathematics and the Language of Mathematics in a World of Nations / J. Gray // Parshall, K. H., & Rice, A. (eds), Mathematics Unbound: the Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945. – Providence R. I.: American Mathematical Society, 2002. – 201–228 p.

98. *Gray J.* Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics / J. Gray. Princeton: Princeton University Press, 2008. – 528 p.

99. *Gray J.* Henri Poincaré: a scientific biography / J. Gray. – Princeton, 2012. – 608 p.

100. *Bottazzini U.* Hidden Harmony – Geometric Fantasies / U. Bottazzini, Gray J. – NY: Springer, 2013. – 848 p.

101. *Andre N. R.* An Analysis of the First Proofs of the Heine–Borel Theorem / N. R. Andre, S. M. Engdahl, A. E. Parker. – USA: MAA. – Loci Convergense, 2013. – August. – Электронный ресурс: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/an-analysis-of-the-first-proofs-of-the-heine-borel-theorem-conclusion.

Заключение

Математический анализ как раздел математики и как учебный курс берёт своё начало с открытия дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем в конце XVII века. Но основные понятия начали складываться ещё раньше, во времена античности. Это понятие числа, непрерывности, бесконечно малых и бесконечно больших величин. В Новое время зарождается понятие предела, формулируется принцип непрерывности, понятие функции. Возникает понимание соответствия между арифметическими и геометрическими объектами, понимание линии, а потом и поверхности как геометрического места точек. В поле зрения математиков XVII и XVIII веков находились лишь целые функции, то есть многочлены или представимые степенными рядами. Такие функции непрерывны, а ряды, как правило, были сходящимися. Рассматривались также последовательности частичных сумм ряда.

Мишель Ролль в 1690 году сформулировал утверждение, что если многочлен имеет разные знаки на краях интервала, то внутри интервала найдётся хотя бы один корень уравнения, а также создал метод каскадов, как метод отделения корней уравнения. Это был значительный шаг в представлении геометрического места точек многочлена. Пьер Ферма сформулировал необходимое условие экстремума. Первый курс математического анализа принадлежал Гийому Лопиталю. До конца XVIII века теоремы алгебры и анализа не столько доказывались, сколько объяснялись и демонстрировались с помощью геометрических и физических аналогий. Непрерывность математических объектов трактовалась на языке движения, как, например, у Леонарда Эйлера.

Бернард Больцано первым обратил внимание на необходимость арифметизации анализа. В построении понятия непрерывности он использовал теорему о корневом интервале, и ввёл понятие точной верхней границы. Эта теорема получила имя теоремы Больцано–Коши. Она является одной из самых основных в анализе, к ней обращались и Вейерштрасс, и Кантор, расширив её до многомерных пространств.

Жозеф Луи Лагранж доказал теорему о среднем на основании ряда Маклорена. Ампер дал ей имя Лагранжа. Огюстен Коши создал первый целостный курс математического анализа как изложения учения о бесконечно малых, дифференциального, интегрального исчисления, а также теории рядов, дифференциальных и алгебраических уравнений.

Вторая реформа математического анализа была проведена Вейерштрассом.

Коши сформулировал критерий сходимости последовательности и теорему о среднем для двух функций. У Коши появляется символ ε как оценка ошибки, погрешности. В дальнейшем Вейерштрасс развил зависимость «ε–δ» в строгий математический критерий для определения предела. Вейерштрасс сформулировал основные теоремы о непрерывных функциях. Гейне ввёл понятие равномерной непрерывности функции, и возможность пренебрежения некоторым множеством точек разрыва. Улисс Дини ввёл понятие одностороннего предела и дал новое определение непрерывности функции через равенство левого и правого предела. Так сложилась основная группа теорем математического анализа.

Понятие числа расширялось от натурального, рационального, алгебраического иррационального, мнимого, трансцендентного иррационального к общему понятию числа XIX века. Иррациональные числа в XVIII веке понимались как пределы последовательностей рациональных чисел, но не был решён вопрос о единственности и отношении порядка таких представлений. Шарль Мере, Эдвард Гейне и Георг Кантор, каждый по своему, создали теорию действительного числа на языке фундаментальных последовательностей (удовлетворяющих критерию Коши), определив связь числа и точки. Иначе подошёл к определению числа Дедекинд. Как алгебраист, он не обращался к понятию предела, а определил число как сечение, равно как и точку на прямой, что эквивалентно определению непрерывности арифметической и геометрической прямой. Его концепция привела к аксиоматизации арифметики Дедекинда–Пеано.

Георг Кантор создал теорию множеств, которая, задуманная как обобщение анализа, с годами стала его фундаментом. Современный курс анализа начинается с теории точечных множеств. Теория Кантора породила теоретико-множественную топологию. В исследованиях Кантора и Вейерштрасса развивается понятие связности, созданное Листингом и Риманом. Вейерштрасс начал формализовать концепции метрического и топологического пространства, обобщённые в работах Фреше, Рисса и Хаусдорфа. Отсюда стал развиваться функциональный анализ, достигший зрелости в исследованиях Стефана Банаха.

Две основных концепции – числа и непрерывности – пройдя долгий исторический путь и будучи соотнесёнными одно другому, и создали современный математический анализ.

Именной указатель

Оглавление

Научное издание

Синкевич Галина Ивановна

ИСТОРИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ XVII–XIX ВВ.

Монография

Редактор В. А. Преснова
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка В. Е. Королевой

Подписано к печати 10.10.2016. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 18,1. Тираж 500 экз. Заказ 130. «С» 49.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, ул. Егорова, д. 5/8.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ